

Академия гражданской защиты имени Малика Габдуллина
Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Казахстан

Арман Булатович Кусаинов

**ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИНЯТИЯ
УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ГРАЖДАНСКОЙ
ЗАЩИТЕ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

учебное пособие



Кокшетау – 2025

**Академия гражданской защиты имени Малика Габдуллина
Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Казахстан**

Арман Булатович Кусаинов

**ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРИНЯТИЯ
УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ГРАЖДАНСКОЙ
ЗАЩИТЕ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

учебное пособие

**Кокшетау
2025**

УДК 519.7
ББК 68.9
К 94

Рецензенты:

кандидат технических наук, профессор, директор ТОО «GFP Science»
Джумагалиев Р.М.,

кандидат технических наук, ассоциированный профессор, начальник научно-исследовательского центра Академии гражданской защиты им. М. Габдуллина МЧС Республики Казахстан, **Захаров И.А.**

Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом
Академии гражданской защиты имени Малика Габдуллина МЧС Республики
Казахстан протокол № 11 от 09.07.2025 г.

Кусаинов А.Б.

К 94 Практические аспекты принятия управленческих решений в гражданской защите математическим методом. Учебное пособие / А.Б. Кусаинов – Кокшетау: Академия гражданской защиты им. М. Габдуллина МЧС Республики Казахстан, 2025. – 112 с.



В учебном пособии рассмотрены основные способы применения теории вероятности, математической статистики, теории игр и дискретной математики, методы линейного и нелинейного программирования, динамическое программирование при принятии управленческих решений в гражданской защите.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по образовательным программам послевузовского образования «Пожарная безопасность» и «Защита в чрезвычайных ситуациях», а также может представлять интерес для сотрудников гражданской защиты.

УДК 519.7
ББК 68.9



© АГЗ МЧС РК, 2025
Кусаинов А.Б., 2025

Содержание

Введение	5
1. Вероятностно-статистические методы принятия решения	6
1.1 Статистический метод	6
1.2 Вероятностно-статистический метод	7
2. Вероятностные методы принятия управленческого решения	15
2.1 Закон распределения Пуассона	15
2.2 Оценка вероятности возникновения чрезвычайной ситуации	16
2.3 Оценка вероятности наступления случайного события	19
3. Принятие решений на основе Марковских случайных процессов	23
4. Моделирование принятия решения	29
5. Принятие управленческого решения в условиях риска и неопределенности	32
5.1 Принятие решения в условиях неопределенности	32
5.2 Оценка рискованности принятия управленческого решения	41
5.3 Обобщенный критерий Гурвица	45
6. Принятие управленческого решения в условиях определенности	50
7. Принятие решения с мешаными стратегиями в играх с природой	58
8. Принятие решений в динамике. Дерево решений	67
9. Принятие управленческих решений на основе теории граф	71
10. Оценка эффективности принятия управленческого решения при ликвидации чрезвычайной ситуации	77
11. Многокритериальные методы принятия решений	83
11.1 Выбор рационального состава аварийно-спасательного инструмента	83
11.2 Определение наиболее рационального гидравлического аварийно-спасательного инструмента	87
11.3 Многокритериальный выбор пожарной техники	91
11.4 Модель рационального распределения пожарных автомобилей в противопожарных подразделениях	95
12. Математическая модель транспортной задачи	97
Список используемой литературы	106

Введение

Задачи принятия управленческих решений сводятся к выбору одной или нескольких лучших альтернатив.

Для того чтобы сделать такой выбор, необходимо четко определить цель и критерии (показатели качества), по которым будет проводиться оценка некоторого набора альтернативных вариантов.

Выбор метода принятия такой задачи зависит от количества и качества доступной информации. Данные, необходимые для осуществления обоснованного выбора, можно разделить на четыре категории: информация об альтернативных вариантах; о критериях выбора; о предпочтениях; об окружении задач.

Общая схема принятия решений в гражданской защите включает следующие основные этапы:

- предварительный анализ проблемы;
- постановка задачи;
- получение исходных данных;
- решение задачи принятия решения с привлечением математических методов и вычислительной техники, экспертов и лица, принимающего решение, а также анализ и интерпретация полученных результатов.

Итерационный характер процесса принятия решений можно считать закономерным, что подтверждает необходимость создания и использования эффективных систем компьютерной поддержки.

Принятие решений в гражданской защите, как правило, происходит в условиях неопределенности и риска.

Данное учебное пособие является вторым изданием. В первом издании были рассмотрены основные теоретические аспекты принятия управленческих решений в гражданской защите математическим методом. В данном учебном пособии рассматриваются практические подходы применения управленческих решений в гражданской защите с помощью различных математических методов.

1. Вероятностно-статистические методы принятия решения

1.1 Статистический метод

Для изучения интересующих нас процессов и явлений, например обстановки с чрезвычайными ситуациями в городе, стране или процесса функционирования пожарно-спасательной службы, необходимо прежде всего иметь соответствующие статистические данные.

Проведем математический анализ чрезвычайных ситуаций (ЧС), произошедших в период с 2010 по 2021 годы (рисунок 1.1) [1].

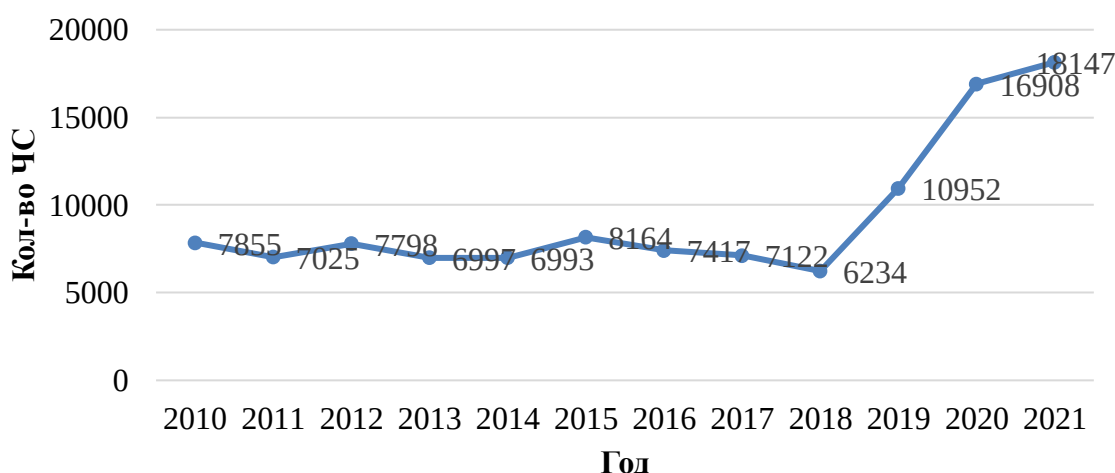


Рисунок 1.1 - Полигон распределения количества ЧС по годам

Составлен вариационный ряд (расположили в порядке возрастания количество ЧС) генеральной совокупности объёмом $n=12$.

Для наглядности составим полигон распределения количества ЧС по годам с 2010 по 2021 гг. (рисунок 1.2).

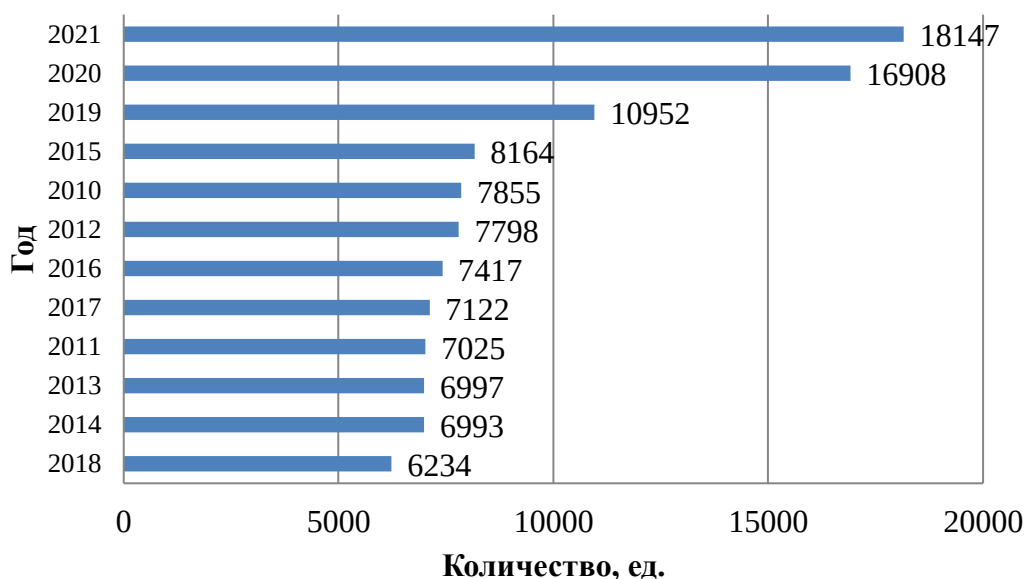


Рисунок 1.2 - Вариационный ряд количества ЧС

Из рисунка 1.2 видно, что количество ЧС в последние годы увеличивается [2]. Наименьшее значения выборки 6234 (наименьшее количество ЧС за рассматриваемый период было в 2018 г.) и наибольшее значения выборки 18147 (наибольшее количество ЧС было зарегистрировано в 2021 г.). Соответственно, размах выборки (длина основного интервала, в который попадают все значения выборки), равен 11913. [3]. Достаточно большая разница между произошедшими ЧС в рассматриваемый период.

Проведем первичную обработку статистических данных. Разобьем основной интервал на 12 подинтервалов. Длина каждого подинтервала составит $h_i=992,7$ ($i=\overline{1,12}$). Определим количество попаданий величины в каждый интервал (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Частота попадания величины в подинтервалы

Подинтервалы	[6234; 7226,7)	[7226,7; 8219,4)	[8219,4; 9212,1)	[9212,1; 10204,8)	[10204,8; 11197,5)	[11197,5; 12190,2)	[12190,2; 13182,9)	[13182,9; 14175,6)	[14175,6; 15168,3)	[15168,3; 16161)	[16161; 17153,7)	[17153,7; 18146,4)
Частоты	5	4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1

Из таблицы 1.1 видно, что наибольшее число ЧС происходит на интервале от 6234 до 8219,4.

Далее по формулам n_i/n , $n_i/n \cdot h_i$ вычислим относительные частоты и плотность относительных частот, где x_i – элемент выборки, n_i – частота элемента x_i (таблица 1.2).

Таблица 1.2 - Результаты первичной обработки статистических данных (эмпирический закон распределения выборки)

Средины подинтервалов в (x_i)	6730,35	7723,05	8715,75	9708,45	10701,15	11693,85	12686,55	13679,25	14671,95	15664,65	16657,35	17650,05
Частоты (n_i)	5	4	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
Относительные частоты (n_i/n)	0,41	0,33	0	0	0,08	0	0	0	0	0	0,08	0,08
Плотность относительной частоты ($n_i/n \cdot h_i$)	0,0004	0,0003	0	0	0,00008	0	0	0	0	0	0,00008	0,00008

В целях визуального анализа, полученных в таблице 1.2 данных, построена гистограмма плотности относительных частот (рисунок 1.3).

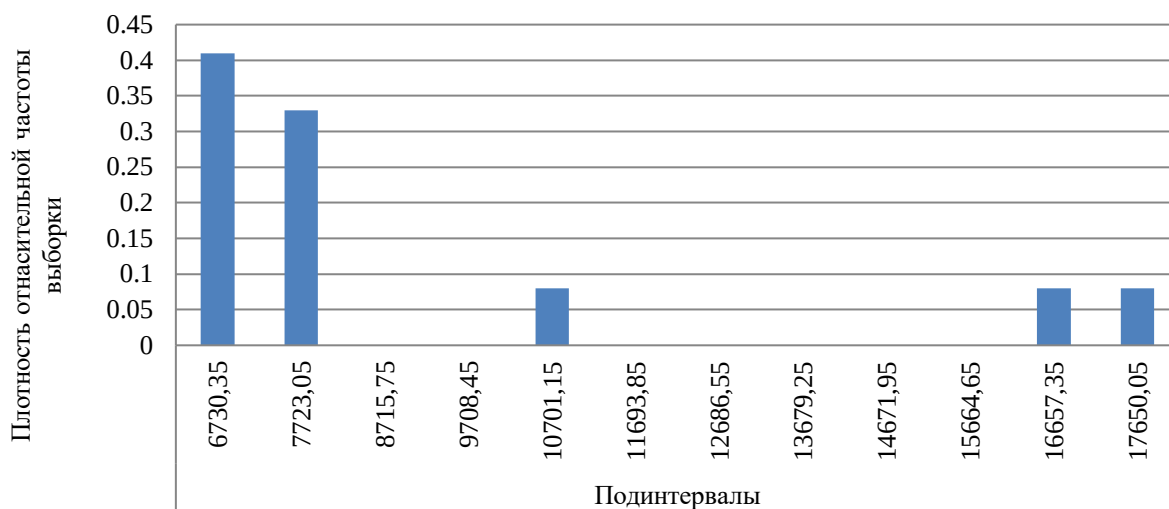


Рисунок 1.3 – Гистограмма выборки

По эмпирическому закону распределения выборки, рассчитаем несмещенную оценку генеральной средней совокупности $\bar{x}_B$, по формуле [4]:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i \quad (1)$$

Из таблицы 1.2 имеем $\bar{x}_B = 9129,3$. Данное значение является средним показателем, при наблюдающимся росте количества ЧС.

Далее по формулам (1.2), (1.3) и (1.4) рассчитаем смещенную оценку генеральной дисперсии (выборочная дисперсия – D_B), исправленную дисперсию (несмещенная дисперсия – S^2) и среднее квадратичное отклонение σ .

$$D_B = \overline{x^2} - (\bar{x}_B)^2 \quad (1.2)$$

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B \quad (1.3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_B} \quad (1.4)$$

Отсюда имеем генеральную дисперсию $D_B = 10141981,2$ исправленную дисперсию $S^2 = 11063979,4$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma = 3326,2$.

Далее, по заданным значениям σ , $\bar{x}_B$ и n имеем:

$$\bar{x}_B - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < N_{\pi} < \bar{x}_B + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.5)$$

где $t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ точность оценки, t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$.

Найдем доверительный интервал для оценки с надежностью $P = 0,95$ количества ЧС N_n в период с 2010 по 2021 гг. [5].

Из условия 1.2 $\Phi(t) = 0,95$ находим, что $t = 1,96$. Тогда точность оценки составить $\delta = 1884$

$$7245 < N_n < 11013$$

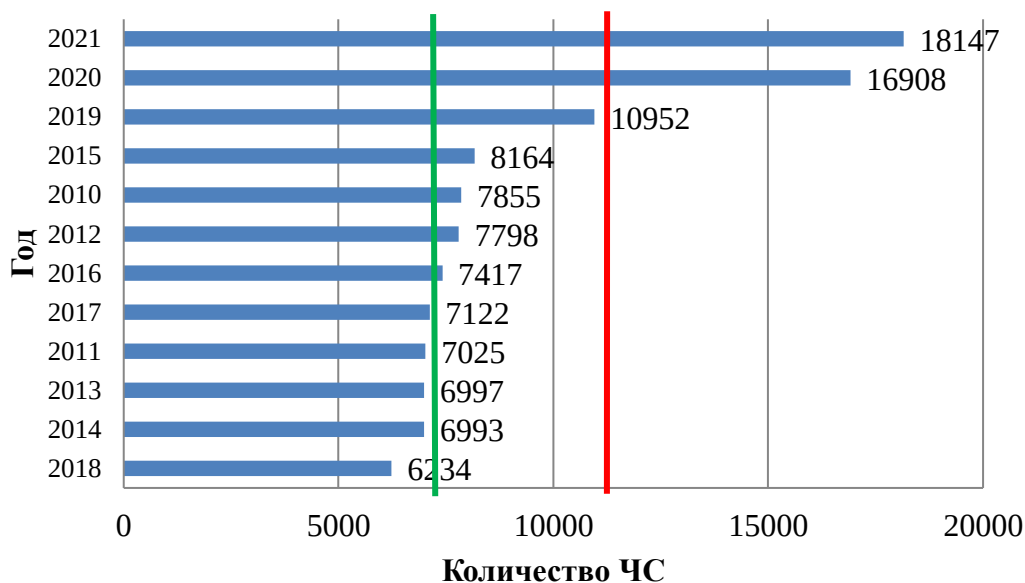


Рисунок 1.4 – Сравнительный анализ интервальных значений для регионов (2010-2021 г.)

Из рисунка 1.4 видно, что в 2020 и 2021 количество ЧС выходили за пределы правого значения.

На основании этого можно сделать вывод, что обстановка с ЧС была выше критического значения.

Уполномоченным органам в области гражданской защиты, в целях обеспечения требуемого уровня необходимо, как минимум оставаться в границах доверительного интервала (но относиться к такой ситуации, как к критической), а желательнее всего удерживать количество ниже левой границы доверительного интервала. Для этого необходимо на постоянной основе анализировать и прогнозировать обстановку, разрабатывать и реализовывать соответствующие управленческие решения [6], а также повышать культуру безопасности общества.

1.2 Вероятностно-статистический метод

В данной работе предлагается использовать вероятностно–статистический метод, дающий возможность составить кратковременный или долгосрочный прогноз в зависимости от постановки задачи.

Анализ динамики ЧС представленных на рисунке 1.5 подтверждает предположение, что наблюдаемое в t -м году число ЧС y_t ($t = 1, 2, \dots, N$, где N – число анализируемых лет) изменяется с течением времени с более или

менее постоянной абсолютной скоростью, тогда математическим выражением такой тенденции будет являться линейная зависимость вида [7]:

$$\hat{y}_t = a + bt, \quad (1.6)$$

где: $\hat{y}$ - расчетное значение числа ЧС в t -м году;

t – номер года;

a и b – коэффициенты.

Для нахождения неизвестных коэффициентов используется метод наименьших квадратов. Согласно этому методу, коэффициенты уравнения (1.7) вычисляются таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_t от расчетных значений $\hat{y}_t$ была минимальной, т.е. отвечала условию:

$$S = \sum_{t=1}^N (y_t - \hat{y}_t)^2 \rightarrow \min. \quad (1.7)$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты a и b следует воспользоваться тем фактом, что в точке экстремума (в данном случае в точке минимум производная функции равна нулю). Для этого нужно приравнять нулю частные производные [35]:

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{t=1}^N [y_t - (a + bt)] = 0, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{t=1}^N [y_t - (a + bt)t] = 0, \quad (1.9)$$

что дает для определения коэффициентов a и b систему линейных уравнений [7]:

$$\begin{cases} aN + b \sum_{t=1}^N t = \sum_{t=1}^N y_t, \\ a \sum_{t=1}^N t + b \sum_{t=1}^N t^2 = \sum_{t=1}^N ty_t. \end{cases} \quad (1.10)$$

Решая эту систему, получаем уравнения для нахождения коэффициентов a и b [8]:

$$b = \frac{N \sum_{t=1}^N ty_t - \sum_{t=1}^N t \sum_{t=1}^N y_t}{N \sum_{t=1}^N t^2 - \left[\sum_{t=1}^N t \right]^2}, \quad (1.11)$$

$$a = \frac{\sum_{t=1}^N y_t - b \sum_{t=1}^N t}{N}. \quad (1.12)$$

Зная величины коэффициентов a и b и предполагая, что имеющаяся тенденция изменения числа ЧС останется неизменной, можно вычислить прогнозную оценку числа ЧС в интересующем году, подставив в уравнение (1.7) номер этого года.

Для выявления тенденции изменения числа ЧС используем аналитическое выравнивание временного ряда в виде зависимости (1.6). Для нахождения коэффициентов a и b воспользуемся формулами (1.11) и (1.12), предварительно составив вспомогательную таблицу 1.3.

Таблица 1.3 - Вспомогательная таблица для вычисления коэффициентов a и b

t	t^2	y_t	$t \cdot y_t$
1	1	7855	7855
2	4	7025	14050
3	9	7798	23394
4	16	6997	27988
5	25	6993	34965
6	36	8164	48984
7	49	7417	51919
8	64	7122	56976
9	81	6234	56106
10	100	10952	109520
11	121	16908	185988
12	144	18147	217764
$\sum_{t=1}^N t = 78$	$\sum_{t=1}^N t^2 = 650$	111612	835509

Подставляя числовые значения из итоговой строки таблицы 1.3 в уравнения (1.11) и (1.12), находим значения коэффициентов:

$$b = \frac{12 \cdot 835509 - 78 \cdot 111612}{12 \cdot 650 - 78^2} = 769,4$$

$$a = \frac{111612 - 769,4 \cdot 78}{12} = 4300$$

Таким образом, уравнение регрессии принимает вид:

$$y_{13} = 4300 + 769,4 \cdot x$$

Используя уравнение (1.6), определяем ориентировочное прогнозное значение числа ЧС в следующий период ($t = 13, 14, 15$):

$$y_{13} = 4300 + 769,4 \cdot 13 = 14302;$$

$$y_{14} = 4300 + 769,4 \cdot 14 = 15072;$$

$$y_{15} = 4300 + 769,4 \cdot 15 = 15841;$$

Наносим на график эмпирические значения числа ЧС за прошедшие 12 лет, выровненные уровни этого временного ряда и прогнозное значение для 13, 14 и 15 года (рисунок 1.5).

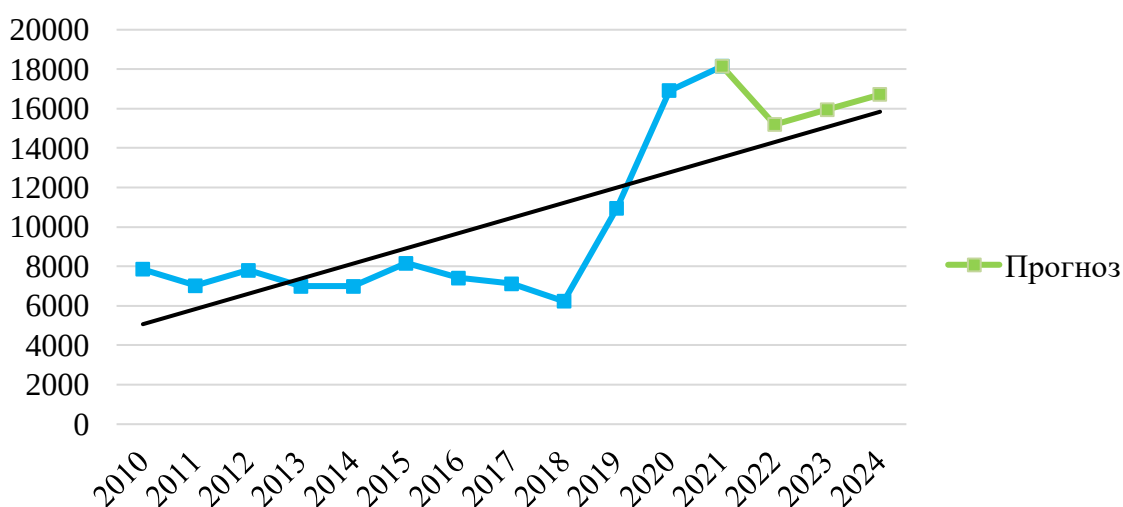


Рисунок 1.5 - Прогнозные значения ЧС для 13, 14 и 15 годов

Для определения точности прогноза ЧС используем формулу средней относительной ошибки [9]:

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{|y_{\text{факт},i} - y_{\text{расч},i}|}{y_{\text{факт},i}} \cdot 100\% \quad (1.13)$$

где $y_{\text{факт},i}$ – фактические значения по годам;

$y_{\text{расч},i}$ – расчетные значения;

n – количество лет.

Расчетное значение, полученное на основе построенной модели, составляет величину $\varepsilon = 4,7 \%$.

Это означает, что математическая модель построена с высокой точностью.

Для определения интервалов прогнозных значений ЧС, рассчитаем среднеквадратичное отклонение по формуле 1.14.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \mu)^2}{N}} \quad (1.14)$$

Согласно данным таблицы 1.3 и формулы 1.11 среднее арифметическое составит $\mu = 10455$.

Далее определим квадрат расстояния от каждой точки данных до среднего арифметического:

х	$(x - \mu)^2$	Итого
7855	$(7855-10455)^2$	6760000
7025	$(7025-10455)^2$	11764900
7798	$(7798-10455)^2$	7059649
6997	$(6997-10455)^2$	11957764
6993	$(6993-10455)^2$	11985444
8164	$(8164-10455)^2$	5248681
7417	$(7417-10455)^2$	9229444
7122	$(7122-10455)^2$	11108889
6234	$(6234-10455)^2$	17816841
10952	$(10952-10455)^2$	247009
16908	$(16908-10455)^2$	41641209
18147	$(18147-10455)^2$	59166864
14302	$(14302-10455)^2$	14799409
15072	$(15072-10455)^2$	21316689
15841	$(15841-10455)^2$	29008996

Согласно полученным значениям, среднеквадратичное отклонение будет равно 4156.

По полученному среднеквадратичному отклонению, рассчитали интервалы средних квадратичных отклонений прогнозных значений числа ЧС для 13, 14 и 15 года (рисунок 1.6).

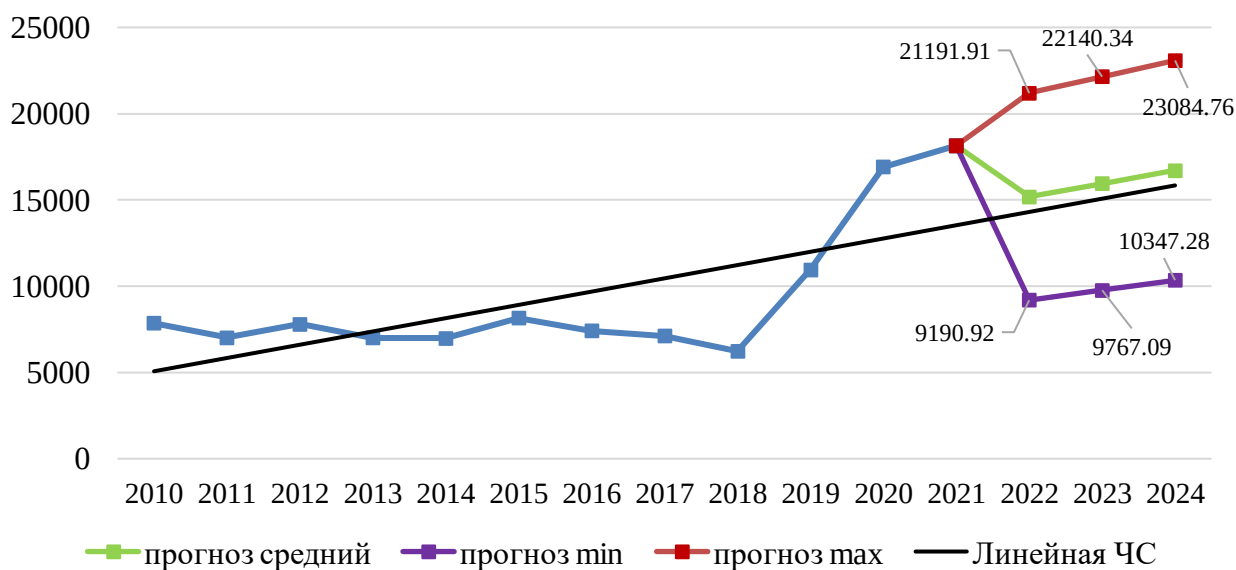


Рисунок 1.6 - Динамика числа ЧС по годам с учетом среднеквадратичных отклонений

Согласно полученным среднеквадратичным отклонениям, проверим точность прогноза ЧС по формуле 13. Относительная ошибка при максимальном прогнозе составит $\varepsilon = 2,4\%$ и минимальном $\varepsilon = 4,4\%$, что показывает о высокой точности построенной модели [10].

По результатам расчетов делаем вывод: несмотря на ежегодные колебания цепных показателей изменчивости временного ряда, в целом в ближайшие годы прогнозируется снижение количества ЧС [11].

Задание для самостоятельной работы

Спрогнозируйте вероятное количество ЧС в ближайшие 3 года на основании данных таблицы 1.4.

Таблица 1.4 – Исходные данные

год	Количество чрезвычайных ситуаций												
	Вариант												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	156	124	128	163	174	167	196	275	210	159	201	172	132
2	159	132	160	167	145	159	142	156	186	168	185	123	186
3	160	186	172	159	202	168	124	159	174	102	168	164	174
4	162	174	275	168	196	171	160	160	145	196	171	185	145
5	163	145	156	102	201	145	172	102	202	142	159	209	202
6	167	202	159	196	185	202	123	196	196	202	162	174	196
7	159	196	160	142	168	196	164	142	142	196	196	145	142
8	168	142	162	124	171	142	185	154	213	142	142	202	162
9	171	124	163	145	159	124	209	189	154	124	124	196	163
10	159	160	148	202	162	160	102	201	148	160	160	142	167
11	162	172	151	196	165	186	196	200	150	164	172	124	159
12	165	275	156	142	185	198	142	185	149	159	173	134	153

2. Вероятностные методы принятия управленческого решения

2.1 Закон распределения Пуассона

Распределение Пуассона играет особую роль в теории принятия решений, поскольку оно описывает закономерность появления случайных отказов в сложных системах.

Этот закон нашел широкое применение при определении вероятности появления и восстановления отказов.

Случайная величина X распределена по закону Пуассона, если вероятность того, что эта величина примет определенное значение m , выражается формулой [12]:

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (2.1)$$

где: λ - параметр распределения (некоторая положительная величина); $m=0,1,2, \dots$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X для закона Пуассона равны параметру распределения λ [13]:

$$M_x = D_x = \lambda \quad (2.2)$$

Распределение Пуассона является однопараметрическим с параметром λ .

Пример. В городе H за 10 ч. произошло 5 пожаров. Считая, что число пожаров на любом отрезке времени распределено по закону Пуассона, найти вероятность того, что за 2 ч. произойдет 2 пожара.

Решение. Среднее число сообщений за 2 ч. равно $\lambda = 2 \cdot 5 / 10 = 1$.

Применяя формулу (2.1), найдем вероятность поступления двух сообщений о пожаре

$$p_m = \frac{1^2}{1 \cdot 2} e^{-1} = 0,184$$

Таким образом, вероятность того, что за 2 ч. В городе H произойдет 2 пожара составляет 18,4%.

Задание для самостоятельной работы

Ежегодно в городе H ежедневно происходит Q чрезвычайных ситуаций. Найти вероятность того, что в городе в течение суток произойдет N чрезвычайных ситуаций согласно данным таблицы 1.

Таблица 2.1 – Исходные данные

№ п/п	Q чрезвычайных ситуаций	N чрезвычайных ситуаций
1	1152	5
2	2586	1
3	1859	1
4	5240	2
5	8542	2
6	4596	3
7	5478	3
8	5862	4
9	7456	4
10	9874	5
11	6547	5
12	6984	1
13	5687	1
14	8742	2
15	9548	2
16	9874	3
17	6984	3
18	1598	4
19	6589	4
20	8975	5
21	7564	5
22	8954	1
23	9654	1
24	6987	2
25	5897	2
26	9638	3
27	6875	3
28	6987	4
29	5548	1
30	9875	2

2.2 Оценка вероятности возникновения чрезвычайной ситуации

При изучении опасных природных процессов часто бывает необходимым оценить вероятность какого-либо события в течение определенного временного интервала. Вероятность $P(N, T)$ появления N рассматриваемых событий за период времени T определяется в зависимости от среднего числа μ таких событий в единицу времени, которая может быть представлена в виде [14]:

$$P(N, T) = \frac{(\mu \cdot T)^N}{N!} \exp(-\mu T), \quad N = 1, 2, 3, \dots, \mu T \quad (2.3)$$

В этой формуле параметр распределения Пуассона записан в виде $\lambda = \mu T$.

Опираясь на соотношение (2.3), нетрудно определить вероятность того, что произойдет ровно одно событие [14]:

$$P(1, T) = \mu \cdot T \exp(-\mu \cdot T) \quad (2.4)$$

Вероятность того, что не произойдет ни одного события [14]:

$$P(0, T) = \exp(-\mu T), \quad (2.5)$$

а вероятность того, что произойдет хотя бы одно (не менее одного) события [14]:

$$P(T) = 1 - P(0, T) = 1 - \exp(-\mu T) \quad (2.6)$$

Пример 1. Пусть в конкретном регионе проходит в среднем 3 сильных землетрясения за 100 лет ($\mu = 0,03$). Найти вероятность одного такого землетрясения в течение $T = 10$ лет.

Решение. Вероятность одного сильного землетрясения за период времени $T = 10$ лет вычисляем по формуле (2.4)

$$P(1, 10) = 0,03 \cdot 10 \exp(-0,03 \cdot 10) = 0,22.$$

Сейсмический риск – это опасность повреждений зданий, сооружений от землетрясений в данном регионе. Он определяется как вероятность реализации не менее одного землетрясения, наносящего ущерб различным объектам, по формуле (2.6), которая представляется в виде [13]:

$$R = 1 - e^{-\mu^* T}, \quad (2.7)$$

где R - сейсмический риск;

μ^* - плотность потока землетрясений интенсивностью $I_0 \geq I_c$;

T - заданный временной интервал;

I_c - сейсмостойкость сооружений.

Пример 2. В регионе происходит в среднем два сильных землетрясения, способных нанести повреждения различным сооружениям, в течение 100 лет.

Оценить сейсмический риск за период эксплуатации сооружений 25 лет.

Решение.

1. Находим плотность потока сильных землетрясений

$$\mu^* = 2/100 = 0,02$$

2. По формуле (2.7) вычисляем сейсмический риск

$$R = 1 - e^{-0,02 \cdot 25} = 1 - 0,61 = 0,39.$$

Получаем, что сейсмический риск в период эксплуатации сооружений 25 лет составляет 39%.

Задание для самостоятельной работы

В городе за период t произошло M землетрясений, нанесшие повреждения различным зданиям и сооружениям.

Оцените сейсмический риск за период эксплуатации сооружений согласно данным таблицы 2.2.

Таблица 2.2 – Исходные данные

№ п/п	Количество землетрясений	Период эксплуатации сооружений, лет	Период t , лет
1	1	15	100
2	2	20	110
3	3	25	115
4	4	30	120
5	5	35	95
6	6	40	99
7	7	45	111
8	8	50	80
9	9	55	85
10	10	60	130
11	11	65	150
12	12	5	160
13	13	10	120
14	14	15	95
15	15	20	99
16	1	25	111
17	2	30	80
18	3	35	85
19	4	40	100
20	5	45	110
21	6	50	115
22	7	55	85
23	8	60	90
24	9	65	95
25	10	5	100
26	11	10	75
27	12	15	70
28	13	20	160
29	14	25	155
30	15	30	140

2.3 Оценка вероятности наступления случайного события

Для количественного сравнения случайных событий между собой по частоте их появления используют вероятность события, p . Вероятность есть число, характеризующее степень возможности появления случайного события при конкретных условиях S . Если при вычислении вероятности появления события A никаких других ограничений, кроме конкретных условий S не присутствует, т.е. рассматривается независимое случайное событие, то такую вероятность называют безусловной, $P(A)$. Условная вероятность $P(A/B)$ определяет вероятность появления случайного события A , вычисленную в предположении, что случайное событие B уже произошло [14].

Возможны два метода определения безусловной вероятности случайного события – классический и статистический.

Классическая вероятность случайного события A , $P(A)$ применима только в том случае, если изучаемое случайное событие образует полную группу Z , элементарных несовместных и равновероятностных исходов [15]:

$$z \in \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$$

Её численные значения определяются отношением числа благоприятствующих этому случайному событию A равновероятностных несовместных элементарных исходов m , к общему числу таких исходов n для случайного события A , образующих полную группу исходов [16]:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} \quad (2.8)$$

Характеристика, противоположная появлению случайного события A , называется отказом $q(A)$, и определяется по выражению [17]:

$$q(A) = 1 - p(A) \quad (2.9)$$

К сожалению, на практике общее число элементарных исходов случайного события, а также «благоприятных» элементарных исходов, крайне трудно определить. Кроме того, далеко не всегда удаётся доказать правомерность допущения о равной вероятности появления тех или иных случайных событий в рамках данной группы. Поэтому в электроэнергетике вместо классической вероятности случайного события значительно чаще используется статистическая вероятность, $\sum P(A)$. Под статистической вероятностью случайного события понимают относительную частоту появления данного случайного события A при достаточно большом числе испытаний, n [18].

$$\sum P(A) = \frac{m_A}{n} \quad (2.10)$$

где m_A - общее число появлений случайного события А.

Пример. Определить вероятность повреждения энергетического блока, $q_{\text{бл}}$, представляющего собой последовательное соединение парового котла с паровой турбиной и электрическим генератором. Паровая турбина получает весь пар от парового котла. Генератор расположен на одном валу с турбиной, т.е. использует всю её мощность. Вероятности повреждения отдельных элементов блока известны и составляют: $q_k=0,02$; $q_T=0,01$ и $q_G=0,001$ для котла, турбины и генератора соответственно.

Решение.

Очевидно, что аварийный выход из работы всего блока может иметь место при повреждении хотя бы одного из трёх указанных элементов блока. Так как безаварийная работа элемента блока, является событием, противоположным повреждению, то вероятности безаварийной работы отдельных элементов блока можно рассчитать, исходя из выражения (2.9)

$$p_k = 1 - 0,02 = 0,98; p_T = 1 - 0,01 = 0,99; p_G = 1 - 0,001 = 0,999$$

Найдём вероятность того, что все элементы блока не повреждены, т.е. блок работает исправно. Так как аварийность каждого элемента можно считать независимой от других элементов, то вероятность того, что все три элемента не повреждены, т.е. вероятность безаварийной работы блока, составит:

$$p_{\text{бл}} = p_k \cdot p_T \cdot p_G = 0,98 \cdot 0,99 \cdot 0,999 = 0,9692$$

Повреждение блока по любой причине является событием, противоположным по отношению к безотказной работе блока. Поэтому, согласно (2.9), вероятность повреждения блока, определится как:

$$q_{\text{бл}} = 1 - 0,9692 = 0,0307$$

Можно найти эту же величину, если рассмотреть полную группу возможных повреждений элементов блока: а) котла; б) турбины; в) генератора; г) котла и турбины; д) котла и генератора; е) турбины и генератора; ж) котла, турбины и генератора.

В таблице 2.3 представим полную группу возможных повреждений различных элементов блока.

Таблица 2.3 - Возможные варианты повреждения элементов блока

Элемент	Варианты						
	I	II	III	IV	V	VI	VII
Котёл	-	+	+	-	-	+	-
Турбина	+	-	+	-	+	-	-
Генератор	+	+	-	+	-	-	-

Найдём вероятность появления каждого из возможных семи случаев повреждения элементов блока:

а) вероятность повреждения котла:

$$q'_k = q_k \cdot p_t \cdot p_g = 0,02 \cdot 0,99 \cdot 0,999 = 0,02$$

Было бы неправильно считать, что вероятность повреждения только котла равна 0,02, так как в число событий «повреждение котла» вошли события одновременного повреждения котла и других элементов блока.

В случае а) интерес представляет повреждение только котла при безотказной работе других элементов. Именно поэтому величина 0,02 умножается на 0,99 и на 0,999.

б) вероятность повреждения турбины:

$$q'_t = p_k \cdot q_t \cdot p_g = 0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,999 = 0,01$$

Аналогично рассчитаем вероятности для остальных случаев, представленных в таблице 2.3:

в) $p_k \cdot p_t \cdot q_g = 0,98 \cdot 0,99 \cdot 0,001 = 0,00979$

г) $q_k \cdot q_t \cdot p_g = 0,02 \cdot 0,01 \cdot 0,999 = 0,00019$

д) $q_k \cdot p_t \cdot q_g = 0,02 \cdot 0,99 \cdot 0,001 = 0,00002$

е) $p_k \cdot q_t \cdot q_g = 0,98 \cdot 0,01 \cdot 0,001 = 0,00001$

ж) $q_k \cdot q_t \cdot q_g = 0,02 \cdot 0,01 \cdot 0,001 = 0,000002$

Если сложить вероятности повреждений для всех семи случаев, то получится вероятность повреждения блока, равная 0,031. Как видно из результатов вычислений, для определения вероятности повреждения блока первый способ гораздо проще и требует меньше расчётов. Зато второй способ позволяет не только получить величину общей вероятности повреждения блока, но и проанализировать вероятности различных причин повреждения всего блока. Расчёты показали, что наибольшее значение имеет вероятность повреждения котла, а затем – турбины. Вероятность этих двух случаев составляет 0,0029 из общей вероятности блока, равной 0,031.

Задание для самостоятельной работы

Определите вероятность повреждения энергетического блока, $q_{бл}$ согласно данным таблицы 2.4.

Таблица 2.4 – Исходные данные

№ п/п	q_k	q_t	q_g
1	0,03	0,02	0,002
2	0,02	0,03	0,004
3	0,04	0,03	0,001

Продолжение таблицы 2.4

4	0,05	0,04	0,005
5	0,06	0,02	0,006
6	0,07	0,03	0,007
7	0,08	0,01	0,008
8	0,09	0,02	0,009
9	0,01	0,04	0,001
10	0,02	0,03	0,002
11	0,06	0,04	0,005
12	0,07	0,06	0,003
13	0,03	0,07	0,004
14	0,05	0,06	0,006
15	0,08	0,03	0,002

3. Принятие решений на основе Марковских случайных процессов

Основные понятия. Функция $X(t)$ называется случайной, если ее значение при любом аргументе t является случайной величиной.

Случайная функция $X(t)$, аргументом которой является время, называется случайным процессом. Случайный процесс, протекающий в какой-либо системе S , называется Марковским (или процессом без последствия), если он обладает следующим свойством: для любого момента времени t_0 вероятность любого состояния системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и каким образом система S пришла в это состояние [19].

Различают следующие основные виды Марковских случайных процессов [20]:

- с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова);
- с непрерывными состояниями и дискретным временем (Марковские последовательности);
- с дискретными состояниями и непрерывным временем (непрерывная цепь Маркова);
- с непрерывным состоянием и непрерывным временем.

Марковские процессы с дискретными состояниями удобно иллюстрировать с помощью, так называемого графа состояний, где кружками обозначены состояния $S_1, S_2, \dots$ системы S , а стрелками – возможные переходы из состояния в состояние. На графе отмечаются только непосредственные переходы, а не переходы через другие состояния. Возможные задержки в прежнем состоянии изображают «петлей», т. е. стрелкой, направленной из данного состояния в него же. Число состояний системы может быть как конечным, так и бесконечным (но счетным) [18].

Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем называют марковской цепью. Для такого процесса моменты $t_1, t_2, \dots$, когда система S может менять свое состояние, рассматривают как последовательные шаги процесса, а в качестве аргумента, от которого зависит процесс, выступает не время t , а номер шага $1, 2, \dots, k, \dots$. Случайный процесс в этом случае характеризуется последовательностью состояний $S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots$, где $S(0)$ – начальное состояние системы (перед первым шагом); $S(1)$ – состояние системы после первого шага; $S(k)$ – состояние системы после k -го шага [14].

Вероятностями состояний цепи Маркова называются вероятности $P_i(k)$ того, что после k -го шага (и до $(k + 1)$ -го) система S будет находиться в состоянии S_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Очевидно, для любой k

$$\sum_{i=1}^n P_i(k) = 1 \quad (3.1)$$

Начальным распределением вероятностей Марковской цепи называется распределение вероятностей состояний в начале процесса [19]:

$$P_1(0), P_2(0), \dots, P_i(0), \dots, P_n(0) \quad (3.2)$$

В частном случае, если начальное состояние системы S в точности известно $S(0) = S_i$, то начальная вероятность $P_i(0) = 1$, а все остальные равны нулю.

Вероятностью перехода (переходной вероятностью) на k -м шаге из состояния S_i в состояние S_j называется условная вероятность того, что система S после k -го шага окажется в состоянии S_j при условии, что непосредственно перед этим (после $k - 1$ шага) она находилась в состоянии S_i .

Поскольку система может пребывать в одном из n состояний, то для каждого момента времени t необходимо задать n^2 вероятностей перехода P_{ij} , которые удобно представить в виде следующей матрицы [18]:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ P_{31} & P_{32} & \dots & P_{3n} \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где P_{ij} – вероятность перехода за один шаг из состояния S_i в состояние S_j ; P_{ii} – вероятность задержки системы в состоянии S_i .

Матрица (3.3) называется переходной или матрицей переходных вероятностей. Если переходные вероятности не зависят от номера шага (от времени), а зависят только от того, из какого состояния в какое осуществляется переход, то соответствующая цепь Маркова называется однородной.

Если для однородной Марковской цепи заданы начальное распределение вероятностей (3.2) и матрица переходных вероятностей P_{ij} (3.3), то вероятности состояний системы $P_i(k)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) определяются по рекуррентной формуле [20]:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1) \cdot P_{ij} \quad (3.4)$$

Пример 1. Рассмотрим процесс функционирования системы – пожарного автомобиля (АЦ). Пусть АЦ в течение одних дежурных суток может находиться в одном из двух состояний: исправном (S_1) и неисправном (S_2). Граф состояний АЦ представлен на рисунке 3.1.

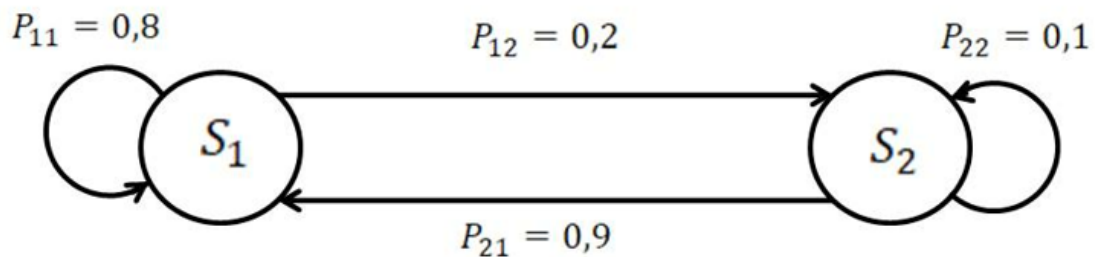


Рисунок 3.1 – Граф состояний пожарного автомобиля

В результате проведения массовых наблюдений за работой АЦ составлена следующая матрица вероятностей перехода:

$$\|P_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}$$

где $P_{11} = 0,8$ - вероятность того, что автомобиль останется в исправном состоянии;

$P_{21} = 0,9$ – вероятность перехода АЦ из состояния «неисправен» в состояние «исправен»;

$P_{12} = 0,2$ – вероятность перехода автомобиля из состояния «исправен» в состояние «неисправен»;

$P_{22} = 0,1$ - вероятность того, что АЦ останется в состоянии «неисправен».

Вектор начальных вероятностей состояний АЦ задан

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

т.е. $P_1(0) = 0$ и $P_2(0) = 1$

Требуется определить вероятности состояний АЦ через трое суток.

Решение.

Используя матрицу переходных вероятностей, определим вероятности состояний $P_i(k)$ после первых суток дежурства:

$$P_1(1) = P_1(0) \cdot P_{11} + P_2(0) \cdot P_{21} = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,9 = 0,9;$$

$$P_2(1) = P_1(0) \cdot P_{12} + P_2(0) \cdot P_{22} = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,1 = 0,2.$$

Вероятности состояний АЦ после вторых суток дежурства следующие:

$$P_1(2) = P_1(1) \cdot P_{11} + P_2(1) \cdot P_{21} = 0,9 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,81;$$

$$P_2(2) = P_1(1) \cdot P_{12} + P_2(1) \cdot P_{22} = 0,9 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,1 = 0,19.$$

Вероятности состояний АЦ после третьих суток дежурства:

$$P_1(3) = P_1(3) \cdot P_{11} + P_2(3) \cdot P_{21} = 0,81 \cdot 0,8 + 0,19 \cdot 0,9 = 0,819;$$

$$P_2(23) = P_1(31) \cdot P_{12} + P_2(3) \cdot P_{22} = 0,81 \cdot 0,2 + 0,19 \cdot 0,1 = 0,181.$$

Таким образом, после третьих суток дежурства АЦ будет находиться в исправном состоянии с вероятностью 0,819 и в состоянии «неисправен» с вероятностью 0,181.

Пример 2. Рассмотрим гарнизон противопожарной службы города, который состоит из двух пожарных частей S_1 и S_2 , каждое из которых может находиться в одном из двух состояний: 0 – режим ожидания и 1 – выезд по тревоге. В определённые моменты времени подразделения могут выехать по тревоге. Выделим возможные состояния системы:

N_i	N_0	N_1	N_2	N_3
S_1	0	1	0	1
S_2	0	0	1	1

Состояние N_0 соответствует, когда обе пожарные части находятся в режиме ожидания, а состояние N_3 соответствует случаю, когда оба подразделения выехали по тревоге.

Предположим, что заданы вероятности переходов в виде матрицы:

	N_0	N_1	N_2	N_3
N_0	0	0,2	0,5	0,3
N_1	0,5	0	0,1	0,4
N_2	0,5	0	0	0,5
N_3	0	0,4	0,6	0

и начальные вероятности $P_0(0) = 0,8; P_1(0) = 0,2; P_2(0) = 0; P_3(0) = 0;$

Определим вероятности нахождения системы в том или ином состоянии на различные моменты времени. Согласно выражению (3.4) вероятности состояний системы:

- на момент времени t_1 :

$$\begin{aligned} P_0(1) &= P_0(0) \cdot P_{00} + P_1(0) \cdot P_{10} + P_2(0) \cdot P_{20} + P_3(0) \cdot P_{30} = \\ &= 0,8 \cdot 0,0 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,0 \cdot 0,5 + 0,0 \cdot 0,0 = 0,1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(1) &= P_0(0) \cdot P_{01} + P_1(0) \cdot P_{11} + P_2(0) \cdot P_{21} + P_3(0) \cdot P_{31} = \\ &= 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,0 + 0,0 \cdot 0,0 + 0,0 \cdot 0,4 = 0,16; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(1) &= P_0(0) \cdot P_{02} + P_1(0) \cdot P_{12} + P_2(0) \cdot P_{22} + P_3(0) \cdot P_{32} = \\ &= 0,8 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,1 + 0,0 \cdot 0,0 + 0,0 \cdot 0,6 = 0,42; \end{aligned}$$

$$P_3(1) = P_0(0) \cdot P_{03} + P_1(0) \cdot P_{13} + P_2(0) \cdot P_{23} + P_3(0) \cdot P_{33} =$$

$$= 0,8 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,4 + 0,0 \cdot 0,5 + 0,0 \cdot 0,0 = 0,32;$$

- на момент времени t_2 :

$$P_0(1) = P_0(0) \cdot P_{00} + P_1(0) \cdot P_{10} + P_2(0) \cdot P_{20} + P_3(0) \cdot P_{30} = \\ = 0,1 \cdot 0,0 + 0,16 \cdot 0,5 + 0,42 \cdot 0,5 + 0,32 \cdot 0,0 = 0,29;$$

$$P_1(1) = P_0(0) \cdot P_{01} + P_1(0) \cdot P_{11} + P_2(0) \cdot P_{21} + P_3(0) \cdot P_{31} = \\ = 0,1 \cdot 0,2 + 0,16 \cdot 0,0 + 0,42 \cdot 0,0 + 0,32 \cdot 0,4 = 0,148;$$

$$P_2(1) = P_0(0) \cdot P_{02} + P_1(0) \cdot P_{12} + P_2(0) \cdot P_{22} + P_3(0) \cdot P_{32} = \\ = 0,1 \cdot 0,5 + 0,16 \cdot 0,1 + 0,42 \cdot 0,0 + 0,32 \cdot 0,6 = 0,258;$$

$$P_3(1) = P_0(0) \cdot P_{03} + P_1(0) \cdot P_{13} + P_2(0) \cdot P_{23} + P_3(0) \cdot P_{33} = \\ = 0,1 \cdot 0,3 + 0,16 \cdot 0,4 + 0,42 \cdot 0,5 + 0,32 \cdot 0,0 = 0,304.$$

Аналогично вероятности состояний противопожарных подразделений могут быть рассчитаны на соответствующие моменты времени t_n .

Таким образом, на момент времени t_2 противопожарные подразделения будут находиться в режиме ожидания 29% времени, около 70% времени будут находиться на обслуживании выездов, причем почти 30,4% времени противопожарные подразделения одновременно будут заняты обслуживанием выездов.

Задание для самостоятельной работы

Пожарный автомобиль в течение дежурных суток может находиться в одном из двух состояний: исправном (S_1) и неисправном (S_2).

Определите вероятности состояний пожарной машины через трое суток. Матрица вероятностей перехода пожарной машины по вариантам представлена в таблице 3.1:

Таблица 3.1 – Исходные данные

№	N_i	N_1	N_2
1	$\ P_{ij}\ $	0,70	0,30
		0,85	0,15
2	$\ P_{ij}\ $	0,65	0,35
		0,86	0,14
3	$\ P_{ij}\ $	0,65	0,25
		0,78	0,12
4	$\ P_{ij}\ $	0,78	0,22
		0,87	0,13
5	$\ P_{ij}\ $	0,69	0,31
		0,91	0,09
6	$\ P_{ij}\ $	0,71	0,29
		0,89	0,11

Продолжение таблицы 3.1

7	$\ P_{ij}\ $	0,64	0,36
		0,79	0,21
8	$\ P_{ij}\ $	0,59	0,41
		0,70	0,30
9	$\ P_{ij}\ $	0,66	0,34
		0,95	0,05
10	$\ P_{ij}\ $	0,51	0,49
		0,91	0,09
11	$\ P_{ij}\ $	0,55	0,45
		0,85	0,25
12	$\ P_{ij}\ $	0,66	0,44
		0,86	0,14
13	$\ P_{ij}\ $	0,69	0,31
		0,89	0,11
14	$\ P_{ij}\ $	0,63	0,37
		0,88	0,12
15	$\ P_{ij}\ $	0,67	0,33
		0,87	0,13

4. Моделирование принятия решения

В современной практике часто приходится планировать развитие системы гражданской защиты в том или ином направлении. Для того, чтобы результаты этого планирования были достаточно обоснованными, целесообразно предварительно смоделировать данный процесс. Лучше всего это сделать с помощью методов математического моделирования.

Рассмотрим один класс актуальных задач указанного типа. Допустим, какая-то величина Q должна по плану ежегодно монотонно уменьшаться на одну и ту же заданную долю α . Требуется определить через, сколько лет эта величина достигнет заданного уровня (станет меньше вдвое, в 10 раз и т.д.).

Очевидно, что через « k » лет величина Q будет иметь значение [21]:

$$Q = Q_0 (1 - \alpha)^k \quad (k = 1, 2, \dots), (4.1)$$

где Q_0 – начальное значение этой величины.

Перепишем (4.1) для удобства в виде [20]:

$$Q = Q_0 \beta^k \quad (k = 1, 2, \dots), (4.2)$$

где $\beta = 1 - \alpha$, т.е. всегда $\beta < 1$.

Пусть требуется найти значение k , при котором [21]:

$$Q = Q_0 \beta^k = \frac{Q_0}{N}, \quad (4.3)$$

где N – любое положительное число.

Иными словами, требуется решить относительно k уравнение [21]:

$$\beta^k = \frac{1}{N} \quad (4.4)$$

(от значения Q_0 модель не зависит).

Логарифмируя обе части равенства (4.4), найдем [21]:

$$k = -\frac{\lg N}{\lg \beta}, \quad (4.5)$$

Напомним, что $\beta < 1$. Следовательно, $\lg \beta < 0$ и $k > 0$.

Пример 1. Пусть $Q = 35000$ чел., которые ежегодно гибнут при чрезвычайных ситуациях (ЧС). Планируется ежегодно уменьшать число жертв на 5% (т.е. $\alpha=0,05$). Требуется определить, когда (т.е. через сколько лет) число жертв ЧС станет меньше в 10 раз.

Здесь $\beta = 1 - \alpha = 0,95$ и $N = 10$. Подставляя эти данные в формулу (4.5), имеем:

$$k = \frac{-\lg 10}{\lg 0,95} = \frac{-1}{-0,02} = 50(\text{лет}).$$

Таким образом, при заданных условиях число жертв ЧС станет меньше в 10 раз (т.е. составит 3 500 чел.) только через 50 лет.

Если же определять, когда число жертв ЧС при тех же условиях уменьшится в 2 раза, то модель покажет, что это произойдет через 15 лет.

Если положить $\alpha = 0,1$ и $N = 10$, то из формулы (4.5) получим:

$$k = \frac{-\lg 10}{\lg 0,9} = \frac{-1}{-0,0046} = 22(\text{года}).$$

Следовательно, управляя исследуемым процессом и более энергично снижая риск гибели людей при ЧС, можно на порядок уменьшить число жертв уже через 22 года.

Пример 2. Предполагается сокращение к 2030 году числа погибших и получавших травмы людей в результате пожаров по сравнению с 2024 годом на 40% и снижение ущерба от пожаров на 44%.

В 2024 году при пожарах погибло 17238 чел. и 13554 чел. получили травмы. Следовательно, всего пострадало 30792 чел.

В соответствии с намеченными планами в 2030 году (т.е. через 6 лет) пострадавших от пожаров должно было быть на 40% меньше, т.е. 18475 чел.

Расчеты по формуле (4.4) показывают, что для того, чтобы добиться указанного результата, необходимо было ежегодное уменьшение числа жертв пожаров в среднем на 8,2%.

Задание для самостоятельной работы

Ежегодно в регионе происходит Q чрезвычайных ситуаций, планируется уменьшать количество чрезвычайных ситуаций на N число. Требуется определить, через сколько лет число чрезвычайных ситуаций станет меньше в M раз.

Таблица 4.1 – Исходные данные

№ п/п	Количество чрезвычайных ситуаций Q	Планируемое ежегодное уменьшение числа ЧСН, %	M
1	115205	5	6
2	258650	10	4
3	185960	15	7
4	524000	20	8
5	854200	25	5
6	459620	30	9
7	547890	35	10
8	586240	40	6
9	745630	45	4
10	987450	50	7
11	654780	5	8
12	698430	10	5
13	568790	15	9
14	874210	20	10
15	954830	25	6
16	987456	30	4
17	698420	35	7
18	159872	40	8
19	658940	45	5
20	897520	50	9
21	756480	5	10
22	895460	10	6
23	965430	15	4
24	698750	20	7
25	589740	25	8
26	963870	30	5
27	687520	35	9
28	698700	40	10
29	554890	15	6
30	987560	25	4

5. Принятие управленческого решения в условиях риска и неопределенности

5.1 Принятие решения в условиях неопределенности

Математическая модель принятия решения в условиях неопределенности представляет собой формализацию указанной конструкции. Пусть X – множество управляющих воздействий (*альтернатив*) управляющей подсистемы. Y – множество состояний среды. Состояние системы определяется парой (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$. Управляющая подсистема оценивает каждое состояние системы некоторым числом, выражающим «полезность» этого состояния для управляющей подсистемы; таким образом, возникает функция $F: X \times Y \rightarrow R$ [22].

Значение функции $F(x, y)$ есть оценка полезности (*с точки зрения управляющей подсистемы*) того состояния системы, которое возникает, если управляющая подсистема выбирает управляющее воздействие x , а среда принимает состояние y . Принципиальным является то обстоятельство, что при принятии решения ЛПР «не знает», в каком состоянии находится среда, то есть он не имеет информации о наличном состоянии среды. Именно это обстоятельство имеют в виду, когда говорят, что принятие решения происходит в условиях неопределенности. Отметим, что эта неопределенность не является абсолютной, так как принимающему решению известно множество состояний среды (*то есть множество Y*) и известна функция $F(x, y)$ [23].

В теории игр математическую модель принятия решений называют игрой с природой, причем управляющую подсистему принято называть игроком, выбираемые им альтернативные воздействия – стратегиями, а функцию $F(x, y)$ – функцией выигрыша игрока. Таким образом, в теоретико-игровой терминологии задача принятия решения в условиях неопределенности формулируется следующим образом. Пусть X – множество стратегий игрока, Y – множество состояний среды (*природы*), $F(x, y)$ – функция выигрыша игрока. Требуется указать наилучшую в некотором смысле альтернативу, или, как говорят в теории игр, найти оптимальную стратегию. Основная сложность данной задачи, носящая принципиальный характер, связана с отсутствием у игрока информации о состоянии среды (если бы игрок такую информацию имел, то его функция выигрыша стала бы функцией одной переменной x и задача нахождения оптимальной стратегии превратилась бы в задачу нахождения наибольшего значения этой функции) [24].

В случае, когда и X , и Y конечны, функцию выигрыша $F(x, y)$ удобно задавать в виде матрицы $A = (a_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, считая $X = \{1, \dots, n\}$, $Y = \{1, \dots, m\}$; при этом a_{ij} есть значение функции выигрыша F в ситуации, когда игрок выбирает стратегию i , а среда принимает состояние j [25].

Принимая во внимание, что в математической модели «природа» стратегий игрока и состояний среды несущественна, удобно различать их по номерам, полагая $X=\{1, \dots, n\}$, $Y=\{1, \dots, m\}$.

Изложим основные принципы, по которым из конечного множества стратегий выбираются оптимальные.

Надо иметь некоторый способ сравнения двух стратегий [26]. Самый простой и естественный принцип, по которому можно их сравнить - это принцип доминирования, состоящий в следующем: стратегия i_1 называется доминирующей стратегией i_2 (записывается $i_1 \geq i_2$), если при любом состоянии среды выигрыш игрока при выборе им стратегии i_1 будет не меньше, чем выигрыш при выборе стратегии i_2 (то есть $a_{i_1 j} \geq a_{i_2 j}$ при всех $j=1, \dots, m$).

Очевидно, что если $i_1 \geq i_2$, то независимо от состояния среды стратегия i_1 является лучшей для игрока, чем стратегия i_2 , поэтому стратегию i_2 можно исключить из дальнейшего рассмотрения. Итак, принцип доминирования состоит в том, что исключаются доминируемые стратегии.

Для того, чтобы выбрать из оставшихся стратегий оптимальную, нужны дополнительные данные.

Основной метод, позволяющий найти оптимальную стратегию в условиях неопределенности, состоит в следующем: формулируется некоторая гипотеза о поведении среды, позволяющая дать единственную численную оценку каждой стратегии. Оптимальной считается та стратегия, для которой численная оценка является максимальной.

Необходимо отметить, что задание оценки каждой стратегии позволяет сравнить любые две стратегии: из двух стратегий лучшей считается та, которая имеет большую оценку (стратегии, имеющие одинаковую численную оценку, считаются эквивалентными).

Таким образом, задание оценок стратегий устанавливает критерий для сравнения стратегий. Рассмотрим теперь важнейшие критерии, используемые для задач принятия решений в условиях неопределенности.

Критерий Лапласа L основан на гипотезе равновероятности и содержательно может быть сформулирован следующим образом: «поскольку мы ничего не знаем о состояниях среды, их надо считать равновероятными». Иногда этот принцип называется также принципом недостаточного основания. При принятии данной гипотезы в качестве оценки стратегии i надо брать соответствующий ей средний выигрыш, то есть [27]:

$$L(i) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{i j} \quad (5.1)$$

Оптимальная по данному критерию стратегия L_0 находится из условия

$$L(i_0) = \max_{1 \leq i \leq n} L(i) \quad (5.2)$$

Критерий Вальда V основан на гипотезе крайней осторожности (крайнего пессимизма), которая формулируется так: "При выборе той или иной стратегии надо рассчитывать на худший из возможных вариантов". Если принять эту гипотезу, то оценкой стратегии i является число $V(i) = \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$. Оптимальная по данному критерию стратегия i_0 находится

из условия $V(i_0) = \max_{1 \leq i \leq n} V(i)$, то есть $\min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$.

Принцип оптимальности, основанный на критерии Вальда, называется принципом максимина.

Если значения функции выигрыша имеют характер потерь (то есть, фактически они являются не выигрышами, а проигрышами), то оценкой стратегии i является $\max_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$, а оптимальной будет та стратегия i_0 , при

которой указанный максимум достигает наименьшего значения, то есть $\max_{1 \leq j \leq m} a_{i_0 j} = \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$. Такая стратегия i_0 называется минимаксной, а

соответствующий принцип оптимальности называется принципом минимакса [28].

Критерий Гурвица G связан с введением числа $0 \leq \alpha \leq 1$, называемого "показателем пессимизма-оптимизма". Гипотеза о поведении среды состоит в том, что наихудший вариант реализуется с вероятностью α , а наилучший - с вероятностью $1 - \alpha$. Тогда оценкой стратегии i является число $G(i) = \alpha \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} + (1 - \alpha) \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$, а оптимальная стратегия i_0

находится из условия $G(i_0) = \max_{1 \leq i \leq n} G(i)$. Ясно, что при $\alpha = 1$ данный

критерий превращается в критерий крайнего пессимизма (то есть в критерий Вальда), а при $\alpha = 0$ - в критерий крайнего оптимизма. Содержательная трудность при использовании критерия Гурвица - назначение показателя пессимизма α .

Известны и другие критерии. Критерий Сэвиджа определяется так:

$$S(i) = \max_{1 \leq j \leq m} (\max_{1 \leq k \leq n} a_{kj} - a_{ij}) \quad (5.3)$$

В отличие от предыдущих критериев, оптимальная стратегия - та, что минимизирует значение $S(i)$. Этот критерий - мера сожаления о незнании истинного состояния среды. Критерий Ходжа-Лемана - линейная комбинация критериев Вальда и математического ожидания. Более сложным образом рассчитываются критерии Гермейера и произведения [29].

В общем случае оптимальные решения, полученные по указанным критериям, могут не совпадать (как говорят, критерии противоречат друг другу). Это неудивительно, так как критерии основаны на разных гипотезах.

Пример 1. Процесс организации и управления силами и средствами на пожаре осуществляется в соответствии с правилами организации тушения пожаров [30]. Согласно данным правилам, Руководитель тушения пожара (РТП) для локализации и ликвидации очага горения должен выбрать решающее направление.

Принятие решения, то есть выбор одной из имеющихся альтернатив, является центральным моментом управления силами и средствами на пожаре.

Выбор решающего направления РТП осуществляется исходя из четырех принципов [31]:

- опасные факторы пожара угрожают жизни людей и спасение их невозможно без введения пожарных стволов – силы и средства сосредотачиваются для обеспечения спасательных работ;
- создается угроза взрыва – силы и средства сосредотачиваются и вводятся в местах, где действия подразделений обеспечат предотвращение взрыва;
- горением охвачена часть объекта, и оно распространяется на другие его части или на соседние строения – силы и средства сосредотачиваются и вводятся на участки, где дальнейшее распространение огня может привести к наибольшему ущербу;
- горением охвачено отдельно стоящее здание (сооружение) и нет угрозы распространения огня на соседние объекты – основные силы и средства сосредотачиваются и вводятся в местах наиболее интенсивного горения;
- горением охвачено здание, не представляющее собой ценности, и создалась угроза близко находящемуся объекту – основные силы и средства сосредотачиваются и вводятся со стороны не горящего здания (сооружения).

По прибытию на место вызова РТП может столкнуться с условиями неопределенности при выборе решающего направления. Например, произошел пожар на предприятии. На место пожара прибыло одно отделение противопожарной службы. В ходе проведения разведки РТП установил, что происходит одновременное горение 3 производственных объектов:

- первый объект общей площадью 100 м², площадь пожара составляет 40 м²;
- второй объект общей площадью 90 м², площадь пожара составляет 30 м²;
- третий объект общей площадью 70 м², площадь пожара составляет 25 м².

Угроза жизни и здоровью людей, и распространения огня на соседние объекты отсутствует.

РТП должен принять решения по выбору верного решающего направления. В тоже время принципы выбора решающего направления, изложенные в [31] в данном случае не работают.

Таким образом, РТП вынужден принять решения в условиях неопределенности.

Решение. Неопределенность в условиях тушения пожара- наиболее сложная ситуация для принятия решения: проблема, которую необходимо решить, имеет размытые очертания, альтернативные решения не поддаются четкому определению, а необходимая дополнительная информации недоступна [32]. РТП не может точно определить решающее направление, какие последствия будут иметь планируемые им действия. Результаты могут быть самыми разными.

Произведем выбор решающего направления на тушение пожара согласно вышеизложенному условию.

Используя принципы Лапласа и максимизации среднего ожидаемого последствия, выберем решающее направление на тушение пожара.

Учитывая, что в рассматриваемом случае только два возможных состояния объектов, вероятность каждого принимается равной 0,5.

Найдем значение среднего ожидаемого последствия для каждой альтернативы:

$$V_1 = 40 \cdot 0,5 + 100 \cdot 0,5 = 70\text{м}^2$$

$$V_2 = 30 \cdot 0,5 + 90 \cdot 0,5 = 60\text{м}^2$$

$$V_3 = 25 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,5 = 47,5\text{м}^2$$

На основании полученных данных составим матрицу ожидаемых последствий для выбора альтернативы с максимальным средним ожидаемым последствием (таблица 5.1).

Таблица 5.1 – Матрица ожидаемого дохода – принцип Лапласа

A	S₁	S₂	V
A ₁	40	100	70
A ₂	30	90	60
A ₃	25	70	47,5
p	0,5	0,5	$\sum_{i=1}^n p_i$

Вывод: наиболее предпочтительное решающее направление - A₁.

Произведем выбор по методу минимизации средних ожидаемых последствий. Максимальное значение ожидаемых последствий на момент прибытия РТП (S₁) составляет 40 м², максимальная площадь (S₂) равна 100 м².

Найдем условные последствия для каждой альтернативы для каждого объекта пожара:

$$\begin{aligned}a_{11} &= 40 - 40 = 0\text{м}^2; \\a_{21} &= 40 - 30 = 10\text{м}^2; \\a_{31} &= 40 - 25 = 15\text{м}^2; \\a_{12} &= 100 - 100 = 0\text{м}^2; \\a_{22} &= 100 - 90 = 10\text{м}^2; \\a_{31} &= 100 - 70 = 30\text{м}^2.\end{aligned}$$

Определим средние значения ожидаемых условных последствий для каждой альтернативы:

$$\begin{aligned}L_1 &= 0 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 = 0\text{м}^2 \\L_2 &= 10 \cdot 0,6 + 10 \cdot 0,4 = 10\text{м}^2 \\L_3 &= 15 \cdot 0,6 + 30 \cdot 0,4 = 21\text{м}^2\end{aligned}$$

На основании полученных данных, составим матрицу условных последствий на пожаре для выбора альтернативы с минимальным значением средних ожидаемых последствий (таблица 5.2).

Таблица 5.2 – Матрица ожидаемого дохода

A	S₁	S₂	V
A ₁	0	0	0
A ₂	10	10	10
A ₃	15	30	21
p	0,6	0,4	$\sum_{i=1}^n p_i$

Вывод: наиболее предпочтительное решающее направление – A₃.

Далее определим оптимальное решающее направление на пожаре, используя принципы Лапласа и минимизации средних ожидаемых последствий. Для этого воспользуемся матрицей 5.2.

Определим средние значения ожидаемых условных последствий для каждой альтернативы:

$$\begin{aligned}P_1 &= 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 0\text{м}^2 \\P_2 &= 10 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,5 = 10\text{м}^2 \\P_3 &= 15 \cdot 0,5 + 30 \cdot 0,5 = 22,5\text{м}^2\end{aligned}$$

Составим матрицу условных последствий, с помощью которой выберем альтернативу с минимальным значением средних ожидаемых условных последствий на пожаре (таблица 5.3).

Таблица 5.3 – Матрица условных последствий – принцип Лапласа

A	S₁	S₂	V
A ₁	0	0	0
A ₂	10	10	10
A ₃	15	30	22,5
p	0,6	0,4	$\sum_{i=1}^n p_i$

Вывод: наиболее предпочтительное решающее направление – A₃.

Проведем выбор оптимальной альтернативы на основе принципа крайнего оптимизма, Вальда и Гурвица. Оценим альтернативы в соответствии с этими принципами.

Оценки крайнего оптимизма:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \max\{40, 100\} = 100\text{м}^2 \\
 a_2 &= \max\{30, 90\} = 90\text{м}^2 \\
 a_3 &= \max\{25, 70\} = 70\text{м}^2
 \end{aligned}$$

Оценки крайнего пессимизма:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \min\{40, 100\} = 40\text{м}^2 \\
 b_2 &= \min\{30, 90\} = 30\text{м}^2 \\
 b_3 &= \min\{25, 70\} = 25\text{м}^2
 \end{aligned}$$

Для того чтобы применить принцип Гурвица, выбираем значение уровня оптимизма – возьмем его, для примера, равным 0,7.

Оценки принципа Гурвица $c_i = \alpha a_i + (1 - \alpha)b_i$, $\alpha = 0,7$

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 0,7 \cdot 100 + (1 - 0,7) \cdot 40 = 70 + 12 = 82\text{м}^2 \\
 c_2 &= 0,7 \cdot 90 + (1 - 0,7) \cdot 30 = 63 + 9 = 72\text{м}^2 \\
 c_3 &= 0,7 \cdot 70 + (1 - 0,7) \cdot 25 = 49 + 7,5 = 56,5\text{м}^2
 \end{aligned}$$

К матрице ожидаемого дохода добавим столбцы для оценки альтернатив по принципам крайнего оптимизма (a_i), Вальда (b_i) и Гурвица (c_i) и выберем оптимальную альтернативу, максимизируя показатели a_i , b_i и c_i (таблица 5.4).

Таблица 5.4 - Матрица ожидаемого дохода – принципы крайнего оптимизма, Вальда, Гурвица

A	S₁	S₂	a_i	b_i	c_i
A ₁	40	100	100	40	82
A ₂	30	90	90	30	72
A ₃	25	70	70	25	56,5

Таким образом, в соответствии с принципом крайнего оптимизма решающее направление – A_1 обеспечивает максимально возможные в рассматриваемой ситуации последствия пожара, равной 100 м^2 . Согласно принципу крайнего пессимизма (принцип Вальда) наилучшее решающее направление является – A_1 которое обеспечивает определение в наихудших обстоятельствах (при наихудшем сценарии истечения пожара) последствия пожара, равной 40 м^2 , в худших обстоятельствах пожара результат у данного варианта решающего направления будет выше. При уровне оптимизма, равным $0,7$, наиболее предпочтительное решающее направление согласно принципу Гурвица – A_1 [33].

Исследуем альтернативы (решающие направления) на устойчивость к изменению уровня последствий. Для этих целей найдем значения оценок c_i при различных значениях параметра a . Рассмотрим значения a от $0,1$ до $0,9$ с шагом $0,2$. Заметим, что оценки альтернативного решающего направления при $a=0$ и при $a=1$ уже имеются. Это оценки крайнего пессимизма и крайнего оптимизма. Имеются также оценки при $a=0,7$.

Значения оценок c_i при $a=0,1$:

$$\begin{aligned}c_1 &= 0,1 \cdot 100 + 0,9 \cdot 40 = 10 + 36 = 46 \text{ м}^2 \\c_2 &= 0,1 \cdot 90 + 0,9 \cdot 30 = 9 + 27 = 36 \text{ м}^2 \\c_3 &= 0,1 \cdot 70 + 0,9 \cdot 25 = 7 + 22,5 = 29,5 \text{ м}^2\end{aligned}$$

Значения оценок c_i при $a=0,3$:

$$\begin{aligned}c_1 &= 0,3 \cdot 100 + 0,7 \cdot 40 = 30 + 28 = 58 \text{ м}^2 \\c_2 &= 0,3 \cdot 90 + 0,7 \cdot 30 = 27 + 21 = 48 \text{ м}^2 \\c_3 &= 0,3 \cdot 70 + 0,7 \cdot 25 = 21 + 17,5 = 38,5 \text{ м}^2\end{aligned}$$

Значения оценок c_i при $a=0,5$:

$$\begin{aligned}c_1 &= 0,5 \cdot 100 + 0,5 \cdot 40 = 50 + 20 = 70 \text{ м}^2 \\c_2 &= 0,5 \cdot 90 + 0,5 \cdot 30 = 45 + 15 = 60 \text{ м}^2 \\c_3 &= 0,5 \cdot 70 + 0,5 \cdot 25 = 35 + 12,5 = 47,5 \text{ м}^2\end{aligned}$$

Значения оценок c_i при $a=0,9$:

$$\begin{aligned}c_1 &= 0,9 \cdot 100 + 0,1 \cdot 40 = 90 + 4 = 94 \text{ м}^2 \\c_2 &= 0,9 \cdot 90 + 0,1 \cdot 30 = 81 + 3 = 84 \text{ м}^2 \\c_3 &= 0,9 \cdot 70 + 0,1 \cdot 25 = 63 + 2,5 = 65,5 \text{ м}^2\end{aligned}$$

Запишем полученные значения в виде таблицы 5.5.

Таблица 5.5 - Матрица средних ожидаемых последствий пожара в зависимости от уровня оптимизма

A	C _i						
	a=0	a=0,1	a=0,3	a=0,5	a=0,7	a=0,9	a=1
A ₁	40	46	58	70	82	94	100
A ₂	30	36	48	60	72	84	90
A ₃	25	29,5	38,5	47,5	56,5	65,5	70

Из таблицы 5.5 видно, что самая устойчивая к изменению уровня оптимизма альтернативной решающее направление – A₁. Она является оптимальной при всех значениях уровня оптимизма [34].

Проведем выбор альтернативного решающего направления в соответствии с принципом Сэвиджа.

Обратимся к матрице условных потерь (таблица 5.3). Добавим к матрице столбец оценок альтернатив по Сэвиджу (d_i) [35].

Каждое альтернативное решающее направление оценим максимальным уровнем условных потерь:

$$d_1 = \max\{0, 0\} = 0\text{м}^2$$

$$d_2 = \max\{10, 10\} = 10\text{м}^2$$

$$d_3 = \max\{15, 30\} = 30\text{м}^2$$

Таблица 5.6 – Матрица условных последствий – принцип Сэвиджа

A	S ₁	S ₂	d _i
A ₁	0	0	0
A ₂	10	10	10
A ₃	15	30	30

Наиболее подходящей альтернативой при применении принципа Сэвиджа считается та, которая дает минимальное значение показателю d_i .

В рассматриваемой ситуации наиболее альтернативным решающим направлением является - A₁.

Вывод. По результатам расчетов можно сделать заключение, что A₁ - наиболее предпочтительное решающее направление. Она является оптимальной по большинству критериев [36].

5.2 Оценка рискованности принятия управленческого решения

В предыдущем разделе, нами были рассмотрены математические модели, позволяющие принимать решающее направление на пожаре в условиях неопределенности.

Теперь рассмотрим методику оценки рискованности выбора решающего направления с помощью коэффициента вариации. Выбор оптимального решающего направления по характеристикам пожара означает выбор наименее рискованного решения.

Для проведения оценки рискованности выбора решающего направления примем следующий сценарий на пожаре.

По прибытию на место вызова РТП столкнуться с условиями, произошел пожар, на место вызова прибыло одно отделение противопожарной службы. В ходе проведения разведки РТП установил, что происходит одновременное горение 3 производственных объектов [31]:

- первый объект общей площадью 90 м², площадь пожара составляет 45 м²;
- второй объект общей площадью 95 м², площадь пожара составляет 40 м²;
- третий объект общей площадью 80 м², площадь пожара составляет 45 м².

Угроза жизни и здоровью людей, и распространения огня на соседние объекты отсутствует. РТП необходимо принять решение по выбору направления на тушение пожара [31].

Найдем значение среднего ожидаемого последствия для каждой альтернативы [32]:

$$V_1 = 45 \cdot 0,5 + 90 \cdot 0,5 = 67,5 \text{ м}^2$$

$$V_2 = 40 \cdot 0,5 + 95 \cdot 0,5 = 67,5 \text{ м}^2$$

$$V_3 = 45 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,5 = 62,5 \text{ м}^2$$

На основании полученных данных составим матрицу ожидаемых последствий для выбора альтернативы с максимальным средним ожидаемым последствием (таблица 5.7).

Таблица 5.7 – Матрица ожидаемого дохода – принцип Лапласа

A	S₁	S₂	V
A ₁	45	90	67,5
A ₂	40	95	67,5
A ₃	45	80	62,5
p	0,5	0,5	$\sum_{i=1}^n p_i$

Вывод: наиболее предпочтительное решающее направление - A_1 и A_2 .

Произведем выбор по методу минимизации средних ожидаемых последствий.

Максимальное значение ожидаемых последствий на момент прибытия РТП (S_1) составляет 45 м^2 , максимальная площадь (S_2) равна 95 м^2 . Найдем условные последствия для каждой альтернативы для каждого объекта пожара [37]:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 45 - 45 = 0 \text{ м}^2; \\ a_{21} &= 45 - 40 = 5 \text{ м}^2; \\ a_{31} &= 45 - 45 = 0 \text{ м}^2; \\ a_{12} &= 95 - 90 = 5 \text{ м}^2; \\ a_{22} &= 95 - 95 = 0 \text{ м}^2; \\ a_{32} &= 95 - 80 = 15 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Определим средние значения ожидаемых условных последствий для каждой альтернативы [38]:

$$\begin{aligned} L_1 &= 0 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 = 0 \text{ м}^2 \\ L_2 &= 5 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,4 = 3 \text{ м}^2 \\ L_3 &= 0 \cdot 0,6 + 15 \cdot 0,4 = 6 \text{ м}^2 \end{aligned}$$

Полученные данные внесем в матрицу условных последствий на пожаре для выбора альтернативы с минимальным значением средних ожидаемых последствий (таблица 5.8) [39].

Таблица 5.8 – Матрица условных последствий

A	S_1	S_2	V
A_1	0	5	2
A_2	5	0	3
A_3	0	15	6
p	0,6	0,4	$\sum_{i=1}^n p_i$

Вывод: наиболее предпочтительное решающее направление – A_3 .

Используя значения матрицы 2, на основании принципа Лапласа и минимизации средних ожидаемых последствий рассчитаем оптимальное решающее направление на пожаре [40].

Определим средние значения ожидаемых условных последствий для каждой альтернативы [41]:

$$\begin{aligned} P_1 &= 0 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ м}^2 \\ P_2 &= 5 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ м}^2 \end{aligned}$$

$$P_3 = 0 \cdot 0,5 + 15 \cdot 0,5 = 7,5 \text{ м}^2$$

Составим матрицу условных последствий, с помощью которой выберем альтернативу с минимальным значением средних ожидаемых условных последствий на пожаре (таблица 5.9).

Таблица 5.9 – Матрица условных последствий – принцип Лапласа

A	S₁	S₂	V
A ₁	0	5	2,5
A ₂	5	0	2,5
A ₃	0	15	7,5
p	0,5	0,5	$\sum_{i=1}^n p_i$

Вывод: наиболее предпочтительное решающее направление – A₃.

Необходимо оценить рискованность предлагаемых альтернатив, для этого воспользуемся коэффициентом вариации.

Для вычисления дисперсии (D_φ), среднеквадратического отклонения (σ) и коэффициента вариации (K_B) случайной величины φ (в нашем случае это ожидаемые последствия) воспользуемся известными формулами теории вероятностей [42]:

$$D_\varphi = M(\varphi - M_\varphi)^2 = \sum_{j=1}^n (x_j - M_\varphi)^2 \cdot p_j \quad (5.4)$$

$$\sigma = \sqrt{D_\varphi} \quad (5.5)$$

$$K_B = \frac{\sigma}{M_\varphi} \quad (5.6)$$

где M_φ - математическое ожидание случайной величины φ ;

x_j - возможные значения этой случайной величины;

p_j - вероятности этих значений.

В нашем случае математическим ожиданием случайной величины φ является среднее значение ожидаемого последствия пожара (V), т. е. $M_\varphi = V$.

Обозначим через $D(A_i)$ и $\sigma(A_i)$ дисперсию и среднеквадратическое отклонение ожидаемого последствия пожара (как случайной величины) для альтернативы A_i . Найдем дисперсию для каждой из альтернатив по формуле 5.4 [43]:

$$\begin{aligned} D(A_1) &= (0 - 2,5)^2 \cdot 0,6 + (5 - 2,5)^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м}^2 \\ D(A_2) &= (5 - 2,5)^2 \cdot 0,6 + (0 - 2,5)^2 \cdot 0,4 = 6,25 \text{ м}^2 \\ D(A_3) &= (0 - 7,5)^2 \cdot 0,6 + (15 - 7,5)^2 \cdot 0,4 = 56,25 \text{ м}^2 \end{aligned}$$

Найдем среднеквадратическое отклонение ожидаемого дохода для каждой из альтернатив по формуле 5.5 [40]:

$$\begin{aligned}\sigma(A_1) &= \sqrt{D(A_1)} = \sqrt{2,5} = 1,6\text{м}^2 \\ \sigma(A_2) &= \sqrt{D(A_2)} = \sqrt{6,25} = 2,5\text{м}^2 \\ \sigma(A_3) &= \sqrt{D(A_3)} = \sqrt{56,25} = 7,5\text{м}^2\end{aligned}$$

Определим коэффициенты вариации для каждой альтернативы по формуле 5.6 [40]:

$$\begin{aligned}K_B(A_1) &= \frac{\sigma(A_1)}{V_1} = \frac{1,6}{2,5} = 0,64 \\ K_B(A_2) &= \frac{\sigma(A_2)}{V_2} = \frac{2,5}{6,25} = 0,40 \\ K_B(A_3) &= \frac{\sigma(A_3)}{V_3} = \frac{7,5}{56,25} = 0,13\end{aligned}$$

Сведем полученные результаты в таблицу 5.10.

Таблица 5.10 - Матрица ожидаемого последствия — среднеквадратическое отклонение ожидаемого последствия и коэффициенты вариации

A	S₁	S₂	V	σ(A_i)	K_B(A_i)
A ₁	0	5	2,5	1,6	0,64
A ₂	5	0	2,5	2,5	0,40
A ₃	0	15	7,5	7,5	0,13
P	0,5	0,5	$\sum_{i=1}^n p_i$	-	

Наименьший коэффициент вариаций у альтернативы A₃ равный 0,13. Это значит, что среднее значение отклонений ожидаемой площади пожара составляет 13 % от средних значений площадей пожара для альтернатив A₃ [38].

У альтернативы A₂ данный показатель равен 40 %, а у A₁ составляет 64%. Значит, альтернатива A₃ наименее рискованная из всех трех альтернатив.

Учитывая, что и среднее значение ожидаемых площадей пожара у данной альтернативы выше, чем у A₁ и A₂, делаем вывод, что альтернатива A₃ в рассматриваемых условиях дает наилучшее решающее направление на пожаре.

Вывод. В рассматриваемых условиях пожара РТП следует выбрать решающее направление A₃, по прибытию дополнительных сил и средств направить их на A₂ и A₁.

5.3 Обобщенный критерий Гурвица

Допустим для определенности, что игра с природой задана матрицей выигрышей A . Переставим выигрыши $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ при каждой стратегии A_i , т.е. элементы каждой строки матрицы A , расположив их в неубывающем порядке, и обозначим получившуюся матрицу $B=(b_{ij})$. Пусть числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяют условию $a_j \geq 0, \sum_{j=1}^n a_j = 1$.

Обобщенным показателем эффективности стратегии A_i назовем число [44]:

$$G_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n a_j b_{ij}. \quad (5.7)$$

Обобщенным критерием Гурвица относительно выигрышей с коэффициентами $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется критерий, по которому оптимальной считается стратегия с максимальным показателем эффективности:

$$A^* \in \text{Arg} \max_{i=1,2,\dots,m} G_i(a_1, a_2, \dots, a_n). \quad (5.8)$$

Числа $a_p = \sum_{j=1}^{[n/2]} a_j$ и $a_0 = \sum_{j=[n/2]+1}^n a_j = 1 - a_p$ назовем показателями пессимизма и оптимизма соответственно. Коэффициенты a_j выбираются из субъективных соображений следующим образом: чем опаснее ситуация, тем ближе к единице должен быть коэффициент пессимизма; в безопасной ситуации, наоборот [45].

Можно предложить и формальный способ подсчета этих коэффициентов.

Пусть $b_j = \sum_{i=1}^n b_{ij}, j = 1, 2, \dots, n$ – сумма всех выигрышей, стоящих в j -ом столбце матрицы B , $b_j = \frac{1}{m} b_j = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m b_{ij}, j = 1, 2, \dots, n$ – среднее значение выигрышей, стоящих в j -ом столбце матрицы B , $b = \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_{ij}$ – сумма всех элементов матрицы B .

В случае, когда ЛПР оценивает для себя ситуацию как опасную, он, естественно, хочет подстраховаться и потому при выборе стратегии ведет себя достаточно осторожно, проявляя больше пессимизма, чем оптимизма, поэтому показатель пессимизма должен быть больше показателя оптимизма. В этом случае показатель оптимизма можно найти по формуле [46]:

$$a_0 = \frac{b_1}{b_1 + b_n} \quad (5.9)$$

а коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ – в соответствии с принципом не возрастания средних выигрышей по формуле [47]:

$$a_j = \frac{b_{n-j+1}}{b}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.10)$$

Если ЛПР считает ситуацию безопасной, то показатель оптимизма должен быть больше показателя пессимизма. Это можно выразить выбором показателя оптимизма $a_0 = \frac{b_1}{b_1+b_n}$ неубывающей последовательности коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ по принципу не убывания средних выигрышей [48]:

$$a_j = \frac{b_j}{b}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.11)$$

Например, ЛПР необходимо выбрать из нескольких альтернатив наиболее рациональный для решения возникшей проблемы $A_1, A_2, \dots, A_m$. Указанные стратегии определяются факторами, заданными матрицей [48]:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

ЛПР необходимо принять решение, по выбору наиболее подходящей альтернативы.

Для этого составим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 11 & 16 & 23 \end{pmatrix}$$

В опасной ситуации выбираем коэффициенты a_j по принципу невозрастания средних выигрышей:

$$a_1 = \frac{b_4}{b} = \frac{b_4}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{23}{56}$$

$$a_2 = \frac{b_3}{b} = \frac{b_3}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{16}{56}$$

$$a_3 = \frac{b_2}{b} = \frac{b_2}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{11}{56}$$

$$a_4 = \frac{b_1}{b} = \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{6}{56}$$

Расчитаем обобщенные показатели эффективности стратегий по формуле 5.7.

$$G_1 = \frac{23}{56} \cdot 1 + \frac{16}{56} \cdot 4 + \frac{11}{56} \cdot 5 + \frac{6}{56} \cdot 9 = \frac{196}{56}$$

$$G_2 = \frac{23}{56} \cdot 3 + \frac{16}{56} \cdot 3 + \frac{11}{56} \cdot 5 + \frac{6}{56} \cdot 8 = \frac{220}{56}$$

$$G_3 = \frac{23}{56} \cdot 2 + \frac{16}{56} \cdot 4 + \frac{11}{56} \cdot 6 + \frac{6}{56} \cdot 6 = \frac{212}{56}$$

Получаем, что оптимальной в этом случае является стратегия A_2 , т.к.
 $\max_{i=1,3} G_i = \max \left\{ \frac{196}{56}, \frac{220}{56}, \frac{212}{56} \right\} = \frac{220}{56} = G_2$.

Если же игрок придерживается более оптимистичной стратегии, то, согласно формуле 5.11 получим:

$$a_1 = \frac{b_1}{b} = \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{6}{56}$$

$$a_2 = \frac{b_2}{b} = \frac{b_2}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{11}{56}$$

$$a_3 = \frac{b_3}{b} = \frac{b_3}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{16}{56}$$

$$a_4 = \frac{b_4}{b} = \frac{b_4}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4} = \frac{23}{56}$$

Тогда в этом случае показатели эффективности будут равны:

$$G_1 = \frac{6}{56} \cdot 1 + \frac{11}{56} \cdot 4 + \frac{16}{56} \cdot 5 + \frac{23}{56} \cdot 9 = \frac{337}{56}$$

$$G_2 = \frac{6}{56} \cdot 3 + \frac{11}{56} \cdot 3 + \frac{16}{56} \cdot 5 + \frac{23}{56} \cdot 8 = \frac{315}{56}$$

$$G_3 = \frac{6}{56} \cdot 2 + \frac{11}{56} \cdot 4 + \frac{16}{56} \cdot 6 + \frac{23}{56} \cdot 6 = \frac{290}{56}$$

В этом случае получаем, что оптимальной является стратегия A_1 , т.к.
 $\max_{i=1,3} G_i = \max \left\{ \frac{337}{56}, \frac{315}{56}, \frac{290}{56} \right\} = \frac{337}{56} = G_1$.

В случае если ЛПР придерживается реалистичной стратегии, то [50]:

$$G_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 + 4 + 5 + 9) = \frac{19}{4}$$

$$G_2 = \frac{1}{4} \cdot (3 + 3 + 5 + 8) = \frac{19}{4}$$

$$G_3 = \frac{1}{4} \cdot (2 + 4 + 6 + 6) = \frac{18}{4}$$

ЛПР имеет право выбора между стратегиями A_1 и A_2 .

Отметим, что подобным образом можно рассмотреть и использование обобщенного критерия Гурвица применительно к матрице рисков R_A .

Частным случаем обобщенного критерия является критерий пессимизма-оптимизма Гурвица относительно выигрышей с показателем пессимизма $a \in [0; 1]$. То есть: $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0, a_n = 1 - a$ [51].

Показателем эффективности стратегии A_i по этому критерию является величина: $G(i) = \alpha \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij} + (1 - \alpha) \max_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$, а оптимальная стратегия

A_{i0} определяется из условия: $G_{i0}(a) = G(a) = \max_i G_i(a)$.

Данный критерий учитывает как пессимистичный, так и оптимистический подходы к решению задачи (игры). А именно, при $a = 0$ получаем критерий крайнего оптимизма, и решение совпадает с критерием максимакса; при $a = 1$ получаем критерий крайнего пессимизма и решение совпадает с критерием Вальда. $a \in (0; 1)$ характеризует предрасположение игрока к риску, а именно, чем ближе a к 1, тем игрок менее склонен к риску.

Решим приведенную выше задачу по критерию $G_{i0}(a) = G(a) = \max_i G_i(a)$ [52].

Предположим, что $a = 0,5$. Тогда получим:

$$G_1(a) = G_1 = (0,5) 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 9 = 5$$

$$G_2(a) = G_2 = (0,5) 0,5 \cdot 3 + 0,5 \cdot 8 = 5,5$$

$$G_3(a) = G_3 = (0,5) 0,5 \cdot 2 + 0,5 \cdot 6 = 4$$

Получаем, что оптимальной будет стратегия A_2 .

Вопросы для самоконтроля

1. Как системно описывается задача принятия решения в условиях неопределенности?
2. Что такое управляющая подсистема, что такое среда?
3. Какими факторами определяется состояние системы?
4. Сформулируйте математическую модель задачи принятия решения в условиях неопределенности. Что такое функция полезности (выигрыша)? Что такое условие неопределенности?
5. Как задают функцию выигрыша при условии конечности множеств стратегий и состояний?
6. Какова основная цель задачи принятия решения?

7. Как в теории игр называют задачу принятия решения в условиях неопределенности?
8. Что понимают под оптимальной стратегией игрока?
9. Как задают игру в случае, если множества X и Y конечны?
10. Какие имеются способы сравнения двух стратегий?
11. Что такое принцип доминирования?
12. Каков основной метод, позволяющий найти оптимальную стратегию в задаче принятия решения в условиях неопределенности? Какая стратегия считается оптимальной?

6. Принятие управленческого решения в условиях определенности

При осуществлении профессиональной деятельности территориальными подразделениями уполномоченного органа в сфере гражданской защиты часто приходится решать проблему своевременного ремонта пожарных автомобилей, техники, аварийно-спасательного оборудования и др.

В связи с чем, перед руководителями подразделений состоит задача в определении оптимальных затрат и сроков ремонта пожарной техники и оборудования для обеспечения гражданской защиты на соответствующей административно-территориальной единице [53].

В целях принятия управленческого решения по ремонту пожарной техники и оборудования вначале рассмотрим простейший случай, когда оценки привлекательности альтернатив по каждому критерию качественные и имеются экспертные оценки критериев по одной и той же (например, десятибалльной) шкале. Пусть имеется n альтернатив и k критериев. Обозначим U_{ij} - оценку i -й альтернативы по j -му критерию. Очевидно, что критерии имеют различную важность. Одни оказывают большее влияние на принятое в результате решение, другие меньшее. Назовем степень важности каждого критерия его весом. Пусть вес j -го критерия равен W_j . Вес критерия измеряется по любой пропорциональной шкале (например, от 0 до 1 или по десятибалльной или любой другой шкале). Веса критериев определяют либо эксперты, либо непосредственно лицо принимающее решение (ЛПР) [52].

Если известны оценки альтернатив, веса критериев и если решается задача на максимизацию, то есть чем выше оценка альтернативы, тем она более привлекательна, тогда для принятия оптимального решения необходимо определить функции полезности каждой альтернативы F_i по формуле [53]:

$$F_i = \sum_{j=1}^k U_{ij} W_j, i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.1)$$

и принимается та альтернатива, для которой функция полезности будет максимальна. Если решается задача минимизации (чем меньше оценка альтернатив по критериям, тем привлекательнее альтернатива), то выбирается альтернатива с меньшей функцией полезности [52].

Например, территориальному подразделению гражданской защиты необходимо заключить договор с одной из четырех сервисных компаний A , B , C и D на ремонт пожарных машин.

Для выбора соответствующей компании определены несколько критериев. Одним из основных критериев является стоимость ремонта, гарантийные обязательства и другие расходы, назовем их «Финансовые затраты». Примем вес «Финансовых затрат» наибольшим и по единичной шкале оценив в $W_1 = 0,8$ [43].

Следующим критерием является надежность компании и ее репутация, вес которой составляет $W_2 = 0,5$. Также учитывается критерии «Быстрота реагирования», то как поставлена система, как быстро проводится ремонт пожарных машин. Вес данного критерия составляет $W_3 = 0,3$ [54]. Оценки альтернатив по каждому критерию (чем выше, тем привлекательнее альтернатива) приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 - Оценки альтернатив по каждому критерию

Альтернативы	Оценки критериев (10-балльная шкала)		
	Финансовые затраты	Репутация	Быстрота реагирования
<i>A</i>	6	5	9
<i>B</i>	9	4	7
<i>C</i>	7	8	5
<i>D</i>	5	3	8

По формуле 6.1 рассчитываем функции полезности для каждой альтернативы:

$$F_A = 6 \cdot 0,8 + 5 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,3 = 10,0;$$

$$F_B = 9 \cdot 0,8 + 4 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,3 = 11,3;$$

$$F_C = 7 \cdot 0,8 + 8 \cdot 0,5 + 5 \cdot 0,3 = 11,1;$$

$$F_D = 5 \cdot 0,8 + 3 \cdot 0,5 + 8 \cdot 0,3 = 7,9.$$

Вывод. Установлено, что для второй альтернативы функция полезности максимальна, поэтому рациональнее всего руководителю территориального подразделения заключить договор с компанией *B*.

Далее рассмотрим ситуацию, когда возникает вопрос принятия управленческого решения, при отсутствии полной информации обо всех альтернативах по всем критериям.

Оценки привлекательности критериев и выбора веса их важности осуществляет ЛПР. Практических методов, согласно которым расставляются оценки критериев, на сегодняшний день существует достаточно большое количество. Наиболее простейшим из них является метод жюри, согласно которому ЛПР просто-напросто, в соответствии со своими знаниями, опытом и интуицией, расставляет баллы для каждой альтернативы по имеющемуся критерию по заданной шкале [55].

В практике не всегда можно точно и пропорционально оценить показатели привлекательности альтернатив, особенно при большом их числе. Гораздо проще бывает попарно сравнить все имеющиеся альтернативы по каждому критерию и оценить, насколько одна конкретная альтернатива

привлекательнее другой. Такой метод экспертной оценки получил название метода аналитической иерархии. Рассмотрим его для случая n альтернатив, которые обозначим $A_1, A_2, \dots, A_n$, и m критериев, обозначенные $K_1, K_2, \dots, K_m$. Возьмем первый критерий K_1 и попарно сравним все альтернативы друг с другом по этому критерию. В результате получим матрицу сравнений $V_{ij}^{(1)}$, каждый элемент которой в случае, если альтернатива A_i не менее предпочтительна, чем альтернатива A_j равен h . Если же альтернатива A_i не более предпочтительна чем альтернатива A_j , то соответствующий элемент матрицы (1) $V_{ij}^{(1)}$ равен $1/h$. Так же вычисляются матрицы сравнения $V_{ij}^{(k)}, k=1, 2, \dots, m$ для других критериев [46]. Введем, шкалу сравнений (таблица 6.2).

Таблица 6.2 - Шкала относительной важности парного сравнения альтернатив

Уровень важности	Степень предпочтительности h
Равная важность	1
Умеренное превосходство	3
Существенное превосходство	5
Значительное, большое превосходство	7
Очень большое превосходство	9

Степени предпочтительности 2, 4, 6, 8 являются промежуточными значениями предпочтительности между двумя соседними уровнями.

Следует отметить, что ЛПР может использовать иные другие шкалы важности парных сравнений.

Сравнивая важности критериев, составляется матрица критериев, по которой можно определять их веса [47].

На следующем этапе вычисляются собственные векторы альтернатив по всем критериям. Для каждой i -й альтернативы по k -му критерию вычисляем элемент вектора $U_i^{(k)}$ который равен среднегеометрическому показателю матрицы сравнения для этой альтернативы (строки матрицы) [8]:

$$U_i^{(k)} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n V_{ij}^{(k)}} = \sqrt[n]{V_{i1}^{(k)} \cdot V_{i2}^{(k)} \cdot \dots \cdot V_{in}^{(k)}} \quad (6.2)$$

Такой же собственный вектор вычисляется и для матрицы сравнения критериев.

Далее в результате нормализации собственных векторов вычисляют веса альтернатив по каждому критерию и веса самих критериев. Вес i -й альтернативы по k -му критерию $W_i^{(k)}$ равен отношению соответствующего элемента собственного вектора к сумме всех элементов собственного вектора данного критерия [39]:

$$W_i^{(k)} = \frac{U_i^{(k)}}{\sum_{i=1}^n U_i^{(k)}} = \frac{U_i^{(k)}}{U_1^{(k)} + U_2^{(k)} + \dots + U_n^{(k)}} \quad (6.3)$$

Также вычисляются и веса критериев, которые обозначим $W_{\text{крит}}^{(k)}$, $k=1,2,\dots,m$.

Имея оценки полезностей альтернатив по всем критериям и веса критериев можно вычислить функции полезности по каждой альтернативе и из их сравнения выбрать наилучшую альтернативу с максимальной функцией. Функция полезности i -й альтернативы вычисляется по формуле [56]:

$$F_i = \sum_{k=1}^m W_i^{(k)} \cdot W_{\text{крит}}^{(k)} = W_i^{(1)} \cdot W_{\text{крит}}^{(1)} + W_i^{(2)} \cdot W_{\text{крит}}^{(2)} + \dots + W_i^{(m)} \cdot W_{\text{крит}}^{(m)} \quad (6.4)$$

Рассмотрим предыдущий пример. Так территориальному подразделению гражданской защиты необходимо заключить договор с одной из сервисных компаний на ремонт пожарных машин. Услуги по ремонту пожарных машин предлагают четыре компании, условно обозначим их A , B , C и D .

В качестве критериев при выборе компании выделяются три:

- K_1 – финансовые затраты;
- K_2 – репутация компании;
- K_3 – быстрота реагирования.

ЛПР по первому критерию о финансовых затратах сравнил альтернативы и решил, что A по сравнению с B имеет умеренное преимущество (балл 3), A по сравнению с C имеет значительное превосходство (балл 7) и A по сравнению с D – существенное превосходство (балл 5). Данные баллы заносим в первую строку таблицы 6.3. Сравнивая альтернативы B и C , руководитель решил, что B имеет превосходство большее, чем умеренное и менее, чем существенное, поэтому в таблицу 6.3 на соответствующую позицию было решено записать балл 4. Альтернатива B по сравнению с D имеет умеренное превосходство, а C и D имеют равную важность [50]. Результаты сравнения приведены в таблице 6.3.

Таблица 6.3 - Критерий «Финансовые затраты»

Альтернативы	A	B	C	D
A	1	3	7	5
B	1/3	1	4	3
C	1/7	1/4	1	1
D	1/5	1/3	1	1

Руководителем территориального подразделения проведены такие же по парные сравнения по критериям K_2 и K_3 . Результаты сравнения приведены в таблицах 6.4 и 6.5.

Таблица 6.4 - Критерий «Репутация компании»

Альтернативы	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	1	5	1/7	1/3
<i>B</i>	1/5	1	1/3	1/7
<i>C</i>	7	3	1	3
<i>D</i>	3	7	1/3	1

Таблица 6.5 - Критерий «Быстрота реагирования»

Альтернативы	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>A</i>	1	3	1/3	1/7
<i>B</i>	1/3	1	1/3	1/5
<i>C</i>	3	3	1	1/2
<i>D</i>	7	5	2	1

На следующем этапе проводится сравнение важностей самих критериев. ЛПР считает самым важным первый критерий, он имеет умеренное превосходства над вторым и существенное над третьим. Второй критерий имеет умеренное превосходство над третьим [51]. В результате получаем матрицу (таблица 6.6).

Таблица 6.6 – Матрица сравнения критериев

Критерий	K_1	K_2	K_3
K_1	1	3	5
K_2	1/3	1	3
K_3	1/5	1/3	1

На третьем этапе по формуле 6.2 рассчитываются собственные вектора и веса альтернатив по каждому критерию. Для первого критерия «Финансовые затраты» собственный вектор альтернативы *A* равен [51]:

$$\sqrt[4]{1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5} = 3,201$$

Для второй, третьей и четвертой альтернативы собственные вектора равны:

$$\sqrt[4]{1/3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3} = 0,435$$

$$\sqrt[4]{1/7 \cdot 1/4 \cdot 1 \cdot 1} = 0,435$$

$$\sqrt[4]{1/5 \cdot 1/3 \cdot 1 \cdot 1} = 0,508$$

Рассчитаем теперь веса альтернатив. Для этого просуммируем элементы собственного вектора: $3,202 + 1,414 + 0,435 + 0,508 = 5,559$. Разделим каждый элемент собственного вектора на эту сумму, в результате получим нормализованные веса каждой альтернативы, а именно, для альтернативы *A*: $3,202/5,559=0,576$, для других альтернатив, аналогично, 0,254, 0,078, 0,092. Следует отметить, что в сумме веса должны давать единицу [51]. Результаты расчетов приведены в таблице 6.7.

Таблица 6.7 - Критерий «Финансовые затраты»

Альтернативы	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	Собственный вектор	Вес
<i>A</i>	1	3	7	5	3,201	0,576
<i>B</i>	1/3	1	4	3	1,414	0,254
<i>C</i>	1/7	1/4	1	1	0,435	0,078
<i>D</i>	1/5	1/3	1	1	0,508	0,092
Σ					5,559	1,000

Аналогичные таблицы 6.8 и 6.9 составляем и для случая парного сравнения альтернатив по другим критериям.

Таблица 6.8 - Критерий «Репутация компании»

Альтернативы	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	Собственный вектор	Вес
<i>A</i>	1	5	1/7	1/3	0,699	0,128
<i>B</i>	1/5	1	1/3	1/7	0,312	0,057
<i>C</i>	7	3	1	3	2,817	0,517
<i>D</i>	3	7	1/3	1	1,627	0,298
Σ					5,452	1,000

Таблица 6.9 - Критерий «Быстрота реагирования»

Альтернативы	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	Собственный вектор	Вес
<i>A</i>	1	3	1/3	1/7	0,615	0,111
<i>B</i>	1/3	1	1/3	1/5	0,386	0,070
<i>C</i>	3	3	1	1/2	1,656	0,298
<i>D</i>	7	5	2	1	2,893	0,521
Σ					5,550	1,000

Далее рассчитываем собственные вектора и веса критериев. Отличием при вычислениях собственных векторов является то, что число критериев равно трем (а число альтернатив – четыре), поэтому из произведения парных оценок сравнений нужно брать корень третьей степени [51]. Например, для критерия K_1 :

$$\sqrt[3]{1 \cdot 3 \cdot 5} = 2,466$$

Результаты расчетов приведены в таблице 6.10.

Таблица 6.10 - Собственные вектора и веса критериев

Критерий	K_1	K_2	K_3	Собственный вектор	Вес
K_1	1	3	5	2,466	0,637
K_2	1/3	1	3	1	0,258
K_3	1/5	1/3	1	0,405	0,105
Σ				3,871	1,000

На основании проведенных расчетов определим функции полезности для каждой альтернативы по формуле 6.4:

$$F_1 = 0,576 \cdot 0,637 + 0,128 \cdot 0,258 + 0,111 \cdot 0,105 = 0,423;$$

$$F_2 = 0,254 \cdot 0,637 + 0,057 \cdot 0,258 + 0,070 \cdot 0,105 = 0,184;$$

$$F_3 = 0,078 \cdot 0,637 + 0,517 \cdot 0,258 + 0,298 \cdot 0,105 = 0,211;$$

$$F_4 = 0,092 \cdot 0,637 + 0,298 \cdot 0,258 + 0,521 \cdot 0,105 = 0,182.$$

Вывод. Проведенное моделирование показало, что максимальная функция полезности соответствует альтернативе А, следовательно, ЛПР следует выбрать для ремонта пожарной техники данную компанию [57].

Применение теории принятия решений в условиях определенности позволяет определить наиболее альтернативную сервисную компанию для ремонта пожарной техники с учетом определенных критериев.

Задание для самостоятельной работы

Необходимо определить с какой компанией по ремонту техники ЛПР необходимо заключить договор.

Для выбора соответствующей компании определены несколько критериев. Одним из основных критериев является стоимость ремонта, гарантийные обязательства и другие расходы, назовем их «Финансовые затраты». Примем вес «Финансовых затрат» наибольшим и по единичной шкале оценив в $W_1 = 0,75$.

Надежность компании и ее репутация $W_2 = 0,6$, критерии «Быстрота реагирования» составляет $W_3 = 0,45$. Оценки альтернатив по каждому критерию приведены в таблице 6.11.

Таблица 6.11 - Оценки альтернатив по каждому критерию

Альтернативы	Оценки критериев (10-балльная шкала)
--------------	--------------------------------------

	Финансовые затраты	Репутация	Быстрота реагирования
<i>A</i>	7	6	8
<i>B</i>	8	5	9
<i>C</i>	9	9	3
<i>D</i>	4	2	5

7. Принятие решения с мешаными стратегиями в играх с природой

В предыдущих разделах мы рассмотрели различные соображения и подходы к решению игр с природой. Во всех рассмотренных примерах ЛПР оперирует чистыми стратегиями. Рассмотрим теперь, что может дать

применение смешанных стратегий. Напомним, что смешанная стратегия – это вектор вероятностей выбора чистых стратегий.

В условиях отсутствия достаточно полной информации о действиях противоположной стороны возникает неопределённость в принятии решения. Так, в задачах, приводящих к игровым, эта неопределённость может быть вызвана разными причинами: отсутствием информации об условиях, в которых происходит действие; неоднозначным характером развития событий в будущем; невозможностью получения полной информации о рассматриваемых процессах [58].

Условия, в которых может происходить действие игры, зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективных факторов, которые принято называть «природой». Такие игры называются играми с природой.

С целью уменьшения неблагоприятных последствий при принятии решения следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. Таким образом, ЛПР, вступает в игровые отношения с природой. Любую хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. В широком смысле под "природой" будем понимать совокупность неопределённых факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений.

Задачей ЛПР является принятие наилучшего управленческого решения в каждой конкретной ситуации. Качество принимаемого решения зависит от информированности ЛПР, о ситуации, в которой принимается решение. В случае неопределённости ошибки в принятии решения наиболее вероятны. Умение использовать даже неполную информацию для обоснования принимаемых решений – задача ЛПР, а в решении её помогает математическая теория игры с природой.

От обычной матричной игры игру с природой отличает безразличие природы к результату игры и возможность получения ЛПР дополнительной информации о состоянии природы.

Игры с природой дают математическую модель теории принятия решений в условиях частичной неопределённости. Для её описания используем обозначения матричных игр. Множество стратегий (состояний) природы обозначим B , отдельное состояние её $-B_j, j = \overline{1, n}$. Множество стратегий (решений) обозначим A , а его отдельную стратегию в игре с природой – $A_i, i = \overline{1, m}$ [59].

Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, используя, например, минимаксную стратегию, позволяющую получить наименьший проигрыш.

Природа действует совершенно случайно, возможные стратегии определяются как её состояния; например, условия погоды в данном районе, динамика ЧС, пожарная нагрузка, сочетание производственных факторов и т.д. В некоторых задачах для состояний природы может быть задано распределение вероятностей, в других – оно неизвестно.

Условия игры с природой задаются платёжной матрицей [60]:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} называется выигрышем игрока A , если он использует стратегию A_i , когда природа находится в состоянии B_j . Фактически это может быть значение некоторой функции, характеризующей эффективность принятого игроком решения.

При решении игры с природой допускается исключение доминируемых стратегий только для стратегий игрока. Стратегии природы исключать нельзя, поскольку она может реализовать состояния, заведомо невыгодные для неё.

Наиболее простой является ситуация, когда известна вероятность p_j каждого состояния природы B_j . При этом, если учтены все возможные состояния, то $p_1 + p_2 + \dots + p_j + \dots + p_n = 1$ [61].

Если игрок A выбирает чистую стратегию A_i , то математическое ожидание выигрыша составит $p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in}$. Наиболее выгодной будет та стратегия, при которой достигается

$$\max_i (p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in}) \quad (7.1)$$

Если информация о состояниях природы мала, то можно применить принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которому можно считать, что все состояния природы равновероятны [62]:

$$\max_i \frac{a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}}{n}, \quad (7.2)$$

т.е. стратегию, для которой среднее арифметическое элементов соответствующей строки максимальное.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии. Ранее в 5 разделе мы их рассматривали. Вкратце рассмотрим некоторые из них.

1. Критерий Вальда. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она выбирается из условия [63]:

$$\max_i (\min_j a_{ij}) \quad (7.3)$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека способом.

2. Критерий максимума. Он выбирается из условия [38]:

$$\max_i (\max_j a_{ij}) \quad (7.4)$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. Критерий Гурвица. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле [63]:

$$\max_i (\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij}) \quad (7.5)$$

где α – степень оптимизма и изменяется в диапазоне $[0, 1]$.

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\alpha = 1$ критерий превращается в критерий Вальда, при $\alpha = 0$ – в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем больше последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем α ближе к единице.

4. Критерий Сэвиджа. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии [64].

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Элементы матрицы рисков находятся по формуле [38]:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}, \quad (7.6)$$

где $\max_i a_{ij}$ – максимальный элемент в столбце исходной матрицы. Оптимальная стратегия определяется выражением $\max_i (\max_j a_{ij})$.

При принятии решений в условиях неопределенности следует оценивать различные варианты с точки зрения нескольких критериев. Если рекомендации совпадают, можно с большей уверенностью выбрать наилучшее решение; если рекомендации противоречат друг другу, окончательное решение надо принимать с учетом его сильных и слабых сторон [65].

Пример 1. Возможно строительство четырех типов электростанций: A_1 - (тепловых), A_2 - (приплотинных), A_3 - (бесшлюзовых), A_4 - (шлюзовых). Состояния природы обозначим через P_1, P_2, P_3, P_4 . Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

1) Согласно критерию Вальда

$\max_i (\min_j a_{ij}) = \max(2, 2, 3, 1) = 3 \Rightarrow$ следует строить бесшлюзовую электростанцию.

2) Воспользуемся критерием Сэвиджа. Построим матрицу рисков [66]:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

Согласно критерию Сэвиджа определяем

$$\min_i \left(\max_j r_{ij} \right) = \min(8, 6, 5, 7) = 5.$$

В соответствии с этим критерием также предлагается строить бесшлюзовую электростанцию.

3) Воспользуемся критерием Гурвица. Предположим $\alpha = 1/2$

$$\max_i (\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij}) = \max(5, 7, 6.5, 4.5) = 7,$$

т.е. следует принять решение о строительстве приплотинной электростанции.

4) Если принять известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например, считать эти состояния равновероятностными $P_1=P_2=P_3=P_4=1/4$, то для принятия решения следует найти математические ожидания выигрыша:

$$\begin{aligned} M_1 &= 5 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{4}, \\ M_2 &= 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{1}{4} = \frac{21}{4}, \\ M_3 &= 8 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 10 \cdot \frac{1}{4} = \frac{26}{4}, \\ M_4 &= 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{4} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

Так как максимальное значение имеет M_3 , то следует строить бесшлюзовую электростанцию.

Пример 2. В здании произошел пожар. На место пожара прибыли противопожарные подразделения. Руководителем тушения пожара (РТП) установлено, что в здании находятся 4 человека, в одном или нескольких помещениях. Для спасения людей РТП может направить 2 звена газодымозащитной службы (ГДЗС). При этом задано, что одно звено ГДЗС может спасти одновременно 2-х человек с вероятностью 1, 3-х человек с вероятностью 0,4, 4-х человек с вероятностью 0,2.

Сторона 1 имеет 4 человека, которых необходимо эвакуировать из двух или одного помещения. За каждого не спасенного человека из выигрыша вычитается величина 0,2.

РТП необходимо определить количество звеньев ГДЗС, которые надо направить в каждое помещение.

Выигрыш стороны 2 в данном примере – вероятность эвакуации всех людей за один раз.

Стратегии стороны 2:

- $S_1(1+1)$ - направить по одному звену в каждое помещение;
- $S_2(2+0)$ - направить два звена в помещение.

Стратегии стороны 1:

- $A_1(2+2)$ - в каждом помещении находятся по два человека;
- $A_2(1+3)$ - в одном помещении находится один человек, в другом - три;
- $A_3(0+4)$ - все четыре человека находятся в одном помещении.

Составим матрицу игры: найдем выигрыши для всех комбинаций стратегий (таблица 1).

1. $a_{11} = 1$.
2. $a_{12} = 1 - 0,4 = 0,6$.
3. $a_{21} = 0,4$.
4. $a_{22} = (1 - 0,6) \cdot 0,5 + (1 - 0,2) \cdot 0,5 = 0,6$.
5. $a_{31} = 0,2$.

$$6. a_{32} = 1 \cdot 0,5 = 0,5.$$

Таблица 7.1 - Платежная матрица оптимизации маршрутов звеньев ГДЗС

A	S₁	S₂
A ₁	1	0,6
A ₂	0,4	0,6
A ₃	0,2	0,5

1) Согласно критерию Байеса за оптимальную принимается та стратегия (чистая) A_i, при которой максимизируется средний выигрыш *a* или минимизируется средний риск *r*.

Рассчитаем значения $\sum(a_{ij}p_j)$

$$\begin{aligned}\sum(a_{1,j}p_j) &= 1 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,8 \\ \sum(a_{2,j}p_j) &= 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,5 \\ \sum(a_{3,j}p_j) &= 0,2 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,35\end{aligned}$$

Выбираем из (0,8; 0,5; 0,35) максимальный элемент $\max=0,8$.

Вывод: выбираем стратегию S₁.

2) В соответствии с критерием Лапласа, если вероятности состояний природы правдоподобны, для их оценки используют принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которого все состояния природы полагаются равновероятными, т.е.: $p_1=p_2=p_3=p_4=1/n$. $p_i=1/2$

Таблица 7.2 - Платежная матрица по критерию Лапласа

A	S₁	S₂	$\sum(a_{ij})$
A ₁	0,5	0,3	0,8
A ₂	0,2	0,3	0,5
A ₃	0,1	0,25	0,35
p _j	0,5	0,5	

Выбираем из (0,8; 0,5; 0,35) максимальный элемент $\max=0,8$.

Вывод: выбираем стратегию S₁.

3) По критерию Вальда за оптимальную принимается чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш, т.е. $\max_i (\min_j a_{ij})$.

Критерий Вальда ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает пессимистическую оценку ситуации.

Таблица 7.3 - Платежная матрица по критерию Вальда

A	S₁	S₂	$\min(a_{ij})$
----------	----------------------	----------------------	----------------

A_1	1	0,6	0,6
A_2	0,4	0,6	0,4
A_3	0,2	0,5	0,2

Выбираем из (0,6; 0,4; 0,2) максимальный элемент $\max=0,6$.

Вывод: выбираем стратегию S_1 .

4) Критерий минимального риска Севиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегии ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях, т.е. обеспечивается $\min_i (\max_j a_{ij})$.

Критерий Сэвиджа ориентирует статистику на самые неблагоприятные состояния природы, т.е. этот критерий выражает пессимистическую оценку ситуации.

Находим матрицу рисков. Максимальный выигрыш в j -м столбце $b_j = \max(a_{ij})$ характеризует благоприятность состояния природы.

1. Рассчитываем 1-й столбец матрицы рисков.

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 - 1 = 0; \\ a_{21} &= 1 - 0,4 = 0,6; \\ a_{31} &= 1 - 0,2 = 0,8; \end{aligned}$$

2. Рассчитываем 2-й столбец матрицы рисков.

$$\begin{aligned} a_{12} &= 0,6 - 0,6 = 0; \\ a_{22} &= 0,6 - 0,6 = 0,0; \\ a_{32} &= 0,6 - 0,5 = 0,1; \end{aligned}$$

Результаты вычислений оформим в виде таблицы 7.4.

Таблица 7.4 - Платежная матрица по критерию минимального риска Севиджа

A	S_1	S_2	$\max(a_{ij})$
A_1	0	0	0
A_2	0,6	0	0,6
A_3	0,8	0,1	0,8

Выбираем из (0; 0,6; 0,8) минимальный элемент $\min=0$.

Вывод: выбираем стратегию S_1 .

5) Критерий Гурвица является критерием пессимизма - оптимизма. Критерий Гурвица учитывает возможность как наихудшего, так и наилучшего для человека поведения природы. Как выбирается u ? Чем хуже последствия ошибочных решений, тем больше желание застраховаться от ошибок, тем u ближе к 1.

Рассчитываем d_i .

$$d_1 = 0,5 \cdot 0,6 + (1 - 0,5) \cdot 1 = 0,8$$

$$d_2 = 0,5 \cdot 0,4 + (1 - 0,5) \cdot 0,6 = 0,5$$

$$d_3 = 0,5 \cdot 0,2 + (1 - 0,5) \cdot 0,5 = 0,35$$

Таблица 7.5 - Платежная матрица критерия Гурвица

A	S₁	S₂	min(a_{ij})	max(a_{ij})	d_i
A ₁	1	0,6	0,6	1	0,8
A ₂	0,4	0,6	0,4	0,6	0,5
A ₃	0,2	0,5	0,2	0,5	0,35

Выбираем из (0,8; 0,5; 0,35) максимальный элемент $\max=0,8$.
Вывод: выбираем стратегию S₁.

6) Обобщенный критерий Гурвица является некоторым обобщением критериев крайнего пессимизма и крайнего оптимизма и также представляет собой частный случай обобщенного критерия Гурвица.

Подход пессимиста выбираем коэффициенты α по принципу невозрастания средних выигрышей:

$$\alpha = \frac{b_1}{b_1 + b_2} = \frac{1,2}{1,2 + 2,1} = 0,364$$

Расчитаем обобщенные показатели эффективности стратегий по формуле 5.7.

$$G_1 = 0,364 \cdot 0,6 + (1 - 0,364) \cdot 1 = 0,85$$

$$G_2 = 0,364 \cdot 0,4 + (1 - 0,364) \cdot 0,6 = 0,53$$

$$G_3 = 0,364 \cdot 0,2 + (1 - 0,364) \cdot 0,5 = 0,39$$

Подход оптимиста выбирается из условия неубывания среднего:

$$\alpha = \frac{b_2}{b_1 + b_2} = \frac{2,1}{1,2 + 2,1} = 0,636$$

В этом случае показатели эффективности будут равны:

$$G_1 = 0,636 \cdot 0,6 + (1 - 0,636) \cdot 1 = 0,75$$

$$G_2 = 0,636 \cdot 0,4 + (1 - 0,636) \cdot 0,6 = 0,47$$

$$G_3 = 0,636 \cdot 0,2 + (1 - 0,636) \cdot 0,5 = 0,31$$

Таблица 7.6 - Платежная матрица обобщенного критерия Гурвица

<i>A</i>	<i>S</i> ₁	<i>S</i> ₂	<i>min(a_{ij})</i>	<i>max(a_{ij})</i>	<i>Пессим.</i>	<i>Оптим.</i>
<i>A</i> ₁	1	0,6	0,6	1	0,85	0,75
<i>A</i> ₂	0,4	0,6	0,4	0,6	0,53	0,47
<i>A</i> ₃	0,2	0,5	0,2	0,5	0,39	0,31

Выбираем из (0,85; 0,53; 0,39) максимальный элемент $\max=0,85$.

Вывод: выбираем стратегию *S*₁.

Таким образом, в результате решения статистической игры по различным критериям чаще других рекомендовалась стратегия *S*₁.

Вывод. РТП необходимо направить по одному звену в каждое помещение для спасения людей, находящихся в здании.

Задание для самостоятельной работы

ЛПР необходимо произвести выбор наиболее рационального типа строительства электростанций: *A*₁ - (тепловых), *A*₂ - (приплотинных), *A*₃ - (бесшлюзовых), *A*₄ - (шлюзовых). Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей:

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 & 8 \\ 4 & 5 & 3 & 10 \\ 7 & 2 & 5 & 14 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

8. Принятие решений в динамике. Дерево решений

Дерево решений - графическое изображение ситуации принятия решений, схема, показывающая альтернативные действия и их последствия. Дерево решений является полезный инструмент принятия решений. Оно помогает сформировать наглядную картину потерь и выгод, связанных с каждым возможным образом действий [68].

Дерево решений состоит из следующих компонент:

- одна начальная вершина;

- для каждой вершины, кроме конечных, указываются возможные действия - ветви, исходящие из этой вершины;
- в каждой из конечных вершин указываются исходы или же выигрыши (как вариант - для каждого действия-ветви указывается изменение выигрыша, связанное с этим действием).

С помощью дерева удобно описывать ситуации, когда решения принимаются последовательно, в динамике.

В подобных динамических играх проявляется различие между действием и стратегией. Стратегия - полный план действий, который должен предусматривать выбор некоторых действий в каждой из возможных ситуаций, возникающих в процессе принятия решения [69].

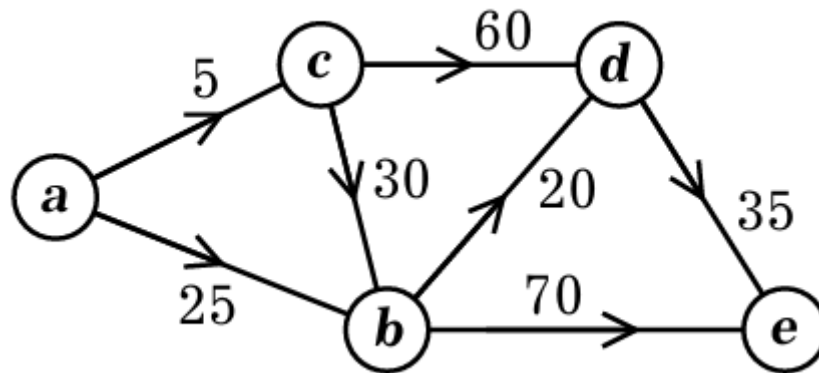


Рисунок 8.1 - Дорожная сеть для задачи о кратчайшем пути от пожарной части *a* до места вызова *e*

На рисунке 8.1 изображена дорожная сеть. Рядом с каждой дорогой указано время пути в минутах. Требуется проехать из пожарной части пункт *a* к месту пожара в пункт *e* за кратчайшее время. Для решения этой задачи построим соответствующее дерево решений.

Для упрощения выберем только те направления движения, которые имеет смысл использовать. Они показаны на рисунке 8.1 стрелками. (Например, не имеет смысла двигаться из *b* в пункт *c*, поскольку в *c* можно быстро, за 5 мин., попасть сразу из *a*). Если двигаться только в направлении стрелок, то маршрут не будет содержать петель, так что дерево решений оказывается конечным [70].

Дерево решений показано на рисунке 8.2.

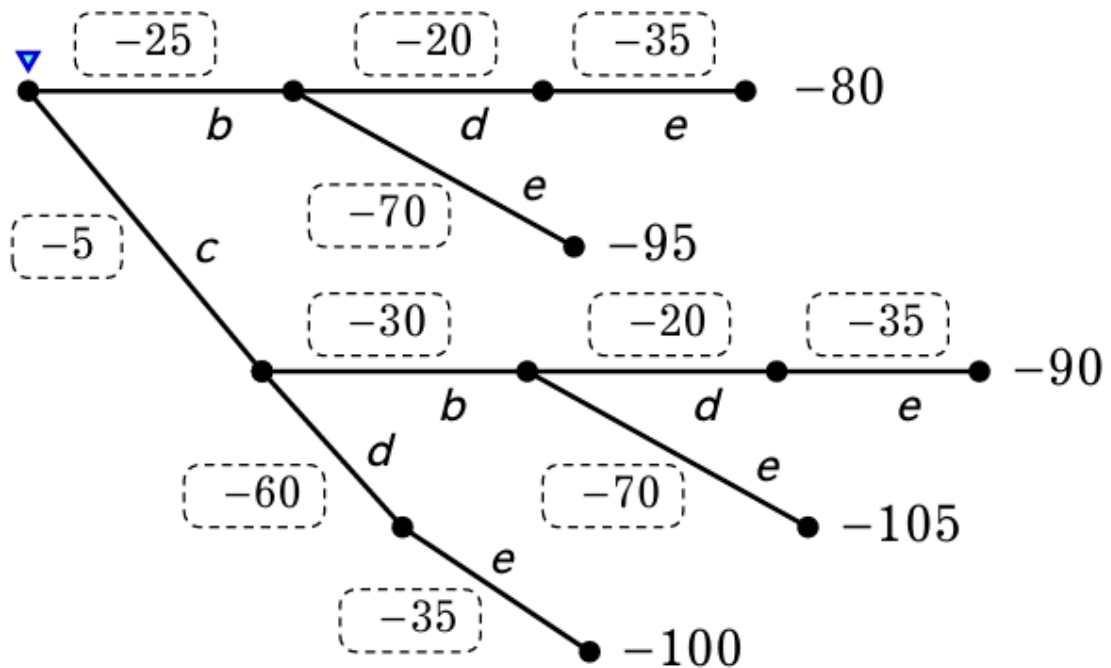


Рисунок 8.2 - Дерево решений для задачи о кратчайшем пути к месту пожара

Дерево строится следующим образом. Мы начинаем двигаться от пункта a . При этом мы можем поехать либо в пункт b , либо в пункт c . Поэтому из начальной вершины дерева выходят две ветви, помеченные как b и c . Если мы выберем b , то окажемся в пункте b , откуда сможем поехать, либо в пункт d , либо в пункт e . Из соответствующей вершины выходят две ветви, помеченные как d и e . Продолжая эти рассуждения, получим все дерево. Рядом с ветвями (в рамках) записаны приросты времени движения со знаком минус. Суммируя эти числа, получим выигрыши в конечных вершинах дерева. Выигрыши отрицательны, поскольку мы стремимся сделать время как можно меньшим. Если, например, из a мы поехали в b , затем в d , затем в e , то в сумме затратим на маршрут $(25+20+35)$ мин., так что выигрыш составит -80 [71].

При анализе дерева решений, следует планировать наперед и проводить анализ с конца. Следует вычеркивать (по крайней мере, мысленно) те ветви, которые не будут выбраны.

На рисунке 8.2 показано оптимальное решение, найденное таким методом. Дерево несколько упрощено за счет того, что выбор пути из b в e через d помечен как d,e . В вершине 4 из e и d,e следует выбрать d,e ($-90 > -105$). В вершине 2 из e и d,e следует выбрать d,e ($-80 > -95$). В вершине 3 из b и d,e следует выбрать b ($-90 > -100$). В вершине 1 из b и c следует выбрать b ($-80 > -90$) [72].

Таким образом, наименьшее время пути равно 80. Из a следует поехать в b , затем в d и затем в e .

На рисунке 8.3 этот метод рассуждений отражен с помощью дополнительных графических обозначений. Те действия, которые не будут выбраны, перечеркнуты. Оптимальные действия дополнительно помечены

жирным пунктиром. Соответственно, оптимальная траектория состоит из тех ветвей, помеченных жирным пунктиром, которые идут друг за другом из начальной вершины [73].

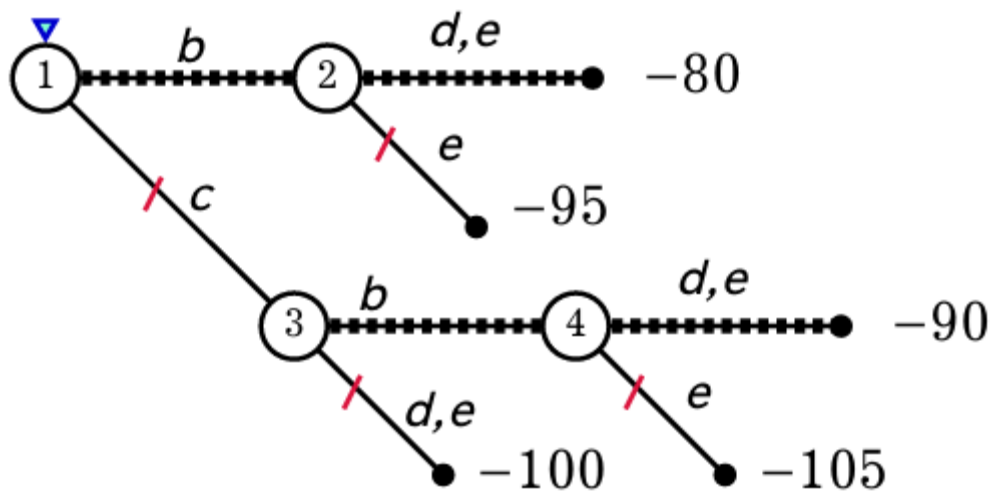


Рисунок 8.3 – Кратчайший путь из пожарной части до места пожара

Найденную оптимальную стратегию можно описать следующим образом [74]:

- из a ехать в b ;
- если в b попали из a , то ехать в d и далее в e ;
- из c ехать в b ;
- если в b попали из c , то ехать в d и далее в e .

Заметим, во-первых, что в этой стратегии есть избыточность, связанная с представлением задачи в виде дерева. Такое представление носит несколько искусственный характер. Можно было просто написать «из b ехать в d и далее в e ».

Во-вторых, и это очень важно, так как стратегия — полный план, то она предусматривает действия в пункте c , хотя эта возможность и не реализуется.

Алгоритм, который здесь используется, называется динамическим программированием. В теории игр он известен под названием обратной индукции.

Задание для самостоятельной работы

Определите кратчайший путь из пожарной части пункт a к месту пожара в пункт e за кратчайшее время (рисунок 8.4). Расстояния между вершинами графа приведены в таблице 8.1.

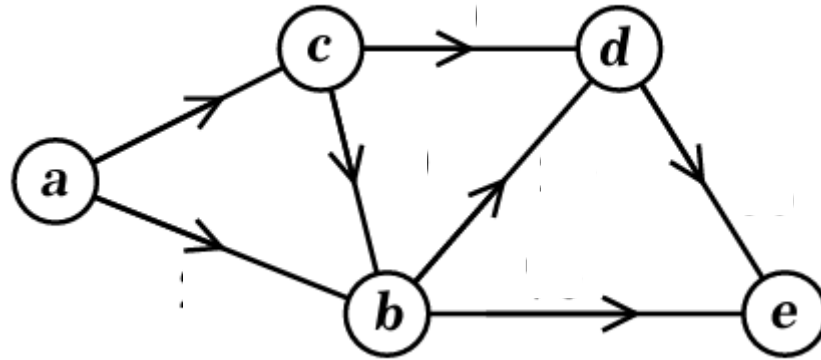


Рисунок 8.4 - Дорожная сеть для задачи о кратчайшем пути

Таблица 8.1 - Численные значения расстояний (по вариантам)

Ребро	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a-c	25	13	12	11	7	6	12	6	2	8
a-b	12	16	14	8	10	12	11	12	18	12
c-d	4	6	5	4	6	8	6	16	14	12
c-b	12	10	16	14	14	12	16	18	12	20
b-d	10	12	14	10	12	10	16	12	11	13
b-e	15	16	18	19	16	17	20	16	8	12

9. Принятие управленческих решений на основе теории граф

Теория графов широко применяется в решении различных управленческих задач, в том числе и в гражданской защите.

Для чего строят графы: чтобы отобразить отношения на множествах. По сути, графы помогают визуально представить всяческие сложные взаимодействия: противопожарное подразделение и расстояние до мест пожара или чрезвычайной ситуаций и т.д.

Рассмотрим пример работы теории граф при определении Руководителем тушения пожара (РТП) ближайшего противопожарного водоисточника и пути следования к нему от места пожара и обратно в некоторой сети с предварительно заданной топологией. При определении ближайшего водоисточника под топологией понимается конфигурация графа, под вершинами – узлы развязки дорожной сети, под ребрами – направления дорожного движения[73].

В соответствии с [74], в практике при решении задач определения оптимального пути наиболее широкое применение нашли три алгоритма: алгоритм Флойда – Уоршелла; алгоритм Беллмана – Форда и алгоритм Дейкстры. Последний предназначен для определения кратчайших путей из одной вершины взвешенного ориентированного графа $G = (X, Y)$, где X – множество вершин графа; Y – множество дуг графа, с исходной вершиной s , в котором веса всех рёбер неотрицательны [75].

Расстояния между водоисточниками заданы ориентированным графом с взвешенными дугами [76]:

$$G = (X, Y); X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; Y = \{y_{ij}\}; i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (9.1)$$

где py_{ij} – вес дуги y_{ij} графа G (расстояние между вершинами y_{ij}).

Для решения задачи определения ближайшего водоисточника и пути следования пожарного автомобиля к нему от места пожара и обратно воспользуемся алгоритмом Дейкстры. В соответствии с данным алгоритмом разработана модель поиска ближайшего водоисточника (таблица 9.1).

Таблица 9.1 - Модель поиска кратчайшего маршрута для бесперебойной подачи воды на тушение пожара

Шаг	Краткое содержание этапа моделирования
Шаг1	Выбирается еще не посещенный водоисточник, находящийся на минимальном расстоянии py_{ij} относительно места пожара — то есть, который находится ближе всех. На первом этапе это один из соседних водоисточников — тот, который находится ближе всего к месту пожара. Выбирается ближайший водоисточник, затем «переходим» на него и определяем уже его ближайшие соседние водоисточники.

Шаг 2	Для выбранного водоисточника осматриваются соседние, и рассчитывается длина пути до них с учетом пройденного пути. Выбирается ближайший водоисточник, затем «переходим» на него и определяем уже его ближайшие соседние водоисточники.
Шаг n	Шаги повторяются, пока на графе есть непосещенные водоисточники.
Вывод	В завершение получаем список кратчайших маршрутов ru_{ij} до каждого ближайшего водоисточника от места пожара и обратно. Для каждого маршрута указана его длина $L(Y_0)$.

Согласно разработанной модели, определим кратчайшее расстояние от места пожара (вершина 1) до всех водоисточников.

Кружками обозначены водоисточники, линиями со стрелками – расстояние между ними (ребра графа) с односторонним или двусторонним движением. В кружках обозначены номера водоисточников, над ребрами обозначен их вес – длина пути. Рядом с каждой вершиной красным обозначена метка – длина кратчайшего пути к этому водоисточнику с места пожара (вершина 1).

Веса рёбер (расстояние до водоисточников, км.) представим в виде матрицы C (таблица 9.2).

Таблица 9.2 – Матрица C

у	1	2	3	4	5
1	0	1	0	5	1
2	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	1
4	0	4	2	0	0
5	0	0	1	3	0

В заголовках строк и столбцов находятся вершины графа. А веса дуг графа размещаются во внутренних ячейках таблицы. На графе имеется всего одна петля, поэтому на главной диагонали матрицы содержатся нулевые значения [76].

Моделирование поиска кратчайшего маршрута для бесперебойной подачи воды на тушение пожара.

Метка места пожара (вершина 1) принимается равной 0, метки остальных водоисточников – недостижимо большое число (в идеале - бесконечность). Данное обстоятельство говорит о том, что расстояния от места пожара (вершина 1) до других водоисточников пока неизвестны. Все вершины графа помечаются как не посещенные (рисунок 9.1).

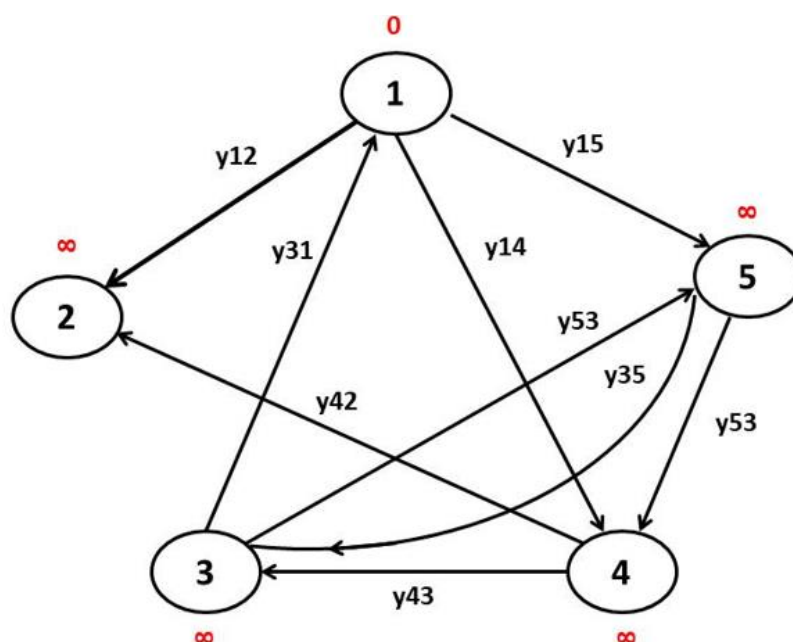


Рисунок 9.1 –Пример построения графа

Шаг первый. Как уже было ранее определено место пожара (вершина 1) имеет минимальную метку (0). Ближайшими водоисточниками имеющие прямой путь от места пожара являются вершины 2, 4 и 5. Обходим ближайшие водоисточники по очереди.

Первый ближайший водоисточник к месту пожара (вершина 1) – является вершина 2, так как расстояние до неё минимально. Расстояние до вершины 2 от места пожара (вершина 1) равна сумме кратчайшего расстояния и длины ребра, идущего из вершины 1 во 2-ю, то есть $0 + 1 = 1$. Это меньше текущей метки вершины 2 (∞), поэтому новая метка вершины 2 равна 1.

Расстояние до вершины 4 от места пожара (вершина 1) равно 5. Новая метка вершины 4 равна 5.

Расстояние до вершины 5 от места пожара (вершина 1) равно 1. Новая метка вершины 5 равна 1.

Все ближайшие водоисточники от места пожара (вершина 1) проверены. Текущее минимальное расстояние до места пожара считается окончательным и пересмотру не подлежит. Вершина 1 отмечается как посещенная.

Шаг второй. Шаг первый повторяется. Снова находим «ближайшую» из не посещенных вершин. Это вершина 2 с меткой 1. Из данной вершины нет ни одного исходящего пути, поэтому мы сразу отмечаем эту вершину как посещенную и переходим к следующей вершине с минимальной меткой.

Шаг третий. Повторяем шаг алгоритма, выбрав вершину 5. Ближайший водоисточник к вершине 5 – является вершина 3, так как расстояние до неё минимально. Расстояние до вершины 3 от вершины 5 равна сумме кратчайшего расстояния и длины ребра, идущего из вершины 5 в 3-ю, то есть

$1 + 1 = 2$. Это меньше текущей метки вершины ($2 < \infty$), поэтому новая метка вершины 3 равна 2.

Расстояние до вершины 4 от вершины 5 равно 4 ($4 < 5$), тогда новая метка вершины 4 равна 4.

Согласно проведенным расчетам, можем увидеть, что метка 4-ой вершины стала меньше, то есть был найден более короткий маршрут в данную вершину из вершины источника. Далее отмечаем 5-ю вершину как посещенную и выбираем следующую вершину, которая имеет минимальную метку.

Шаг четвертый. Снова пытаемся уменьшить метки ближайших водоисточников выбранной вершины, пытаюсь добраться до них через 4-ю вершину. Ближайшим водоисточником вершины 4 является вершина 3. Если добираться до водоисточника (вершина 3) через вершину 4, то расстояние данного пути будет равна 6 ($4 + 2 = 6$). Однако текущая метка третьей вершины равна 2, а $2 < 6$, поэтому метка не меняется.

Шаг пятый. Остается не посещенной вершина 3. Из данной вершины исходят два пути, к вершинам 1 и 5. Однако данные вершины отмечены как посещенные, поэтому мы сразу отмечаем вершину 3 посещенной.

Выполнив все действия, получаем следующий результат (рисунок 9.2).

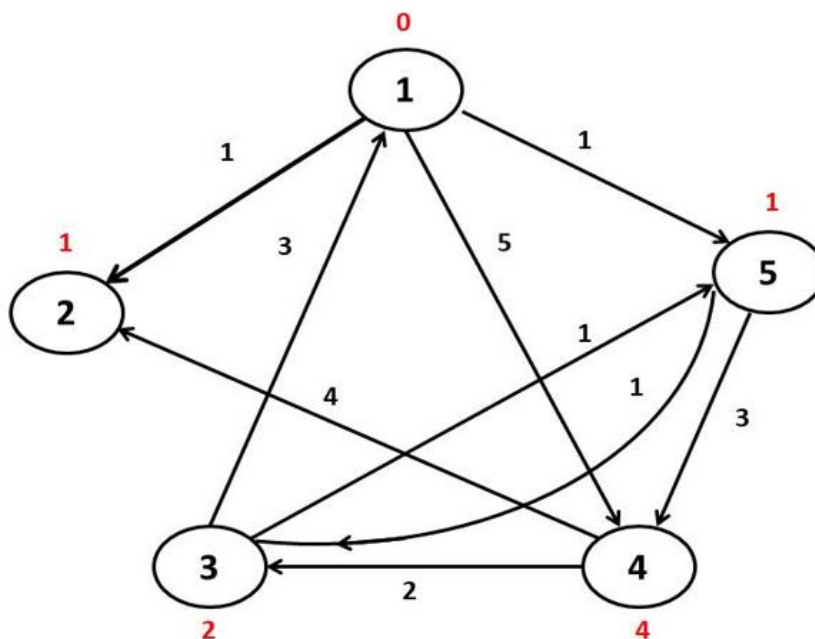


Рисунок 9.2 – Результаты проведенного моделирования

После определения весов вершин приступим к поиску кратчайшего пути от места пожара к водоисточнику и обратно к исходной точке (место пожара). Зная длину пути и направления движения для каждой вершины, рассмотрим все имеющиеся варианты.

Выберем в качестве маршрута для графа G следующие маршруты [77]:

$$Y_1 = \langle y_{15}, y_{54}, y_{43}, y_{31} \rangle$$

$$Y_2 = \langle y_{15}, y_{53}, y_{31} \rangle$$

В данном случае суммарный вес маршрута будет равен суммарному весу дуг маршрута Y_1 :

$$L(Y_1) = y_{15} + y_{54} + y_{43} + y_{31} = 1 + 3 + 2 + 3 = 9$$

$$L(Y_2) = y_{15} + y_{53} + y_{31} = 1 + 1 + 3 = 5$$

Наиболее оптимальным для бесперебойной подачи воды является маршрут $L(Y_2)$. Таким образом, РТП может выбрать маршрут $L(Y_2)$ для бесперебойной подачи огнетушащих веществ на тушение пожара, а также водоисточники u_{53} и u_{31} для забора воды.

Задание для самостоятельной работы

Определите кратчайший путь между точками A и B графа (рисунок 9.3). Расстояния между вершинами графа приведены в таблице 9.3.

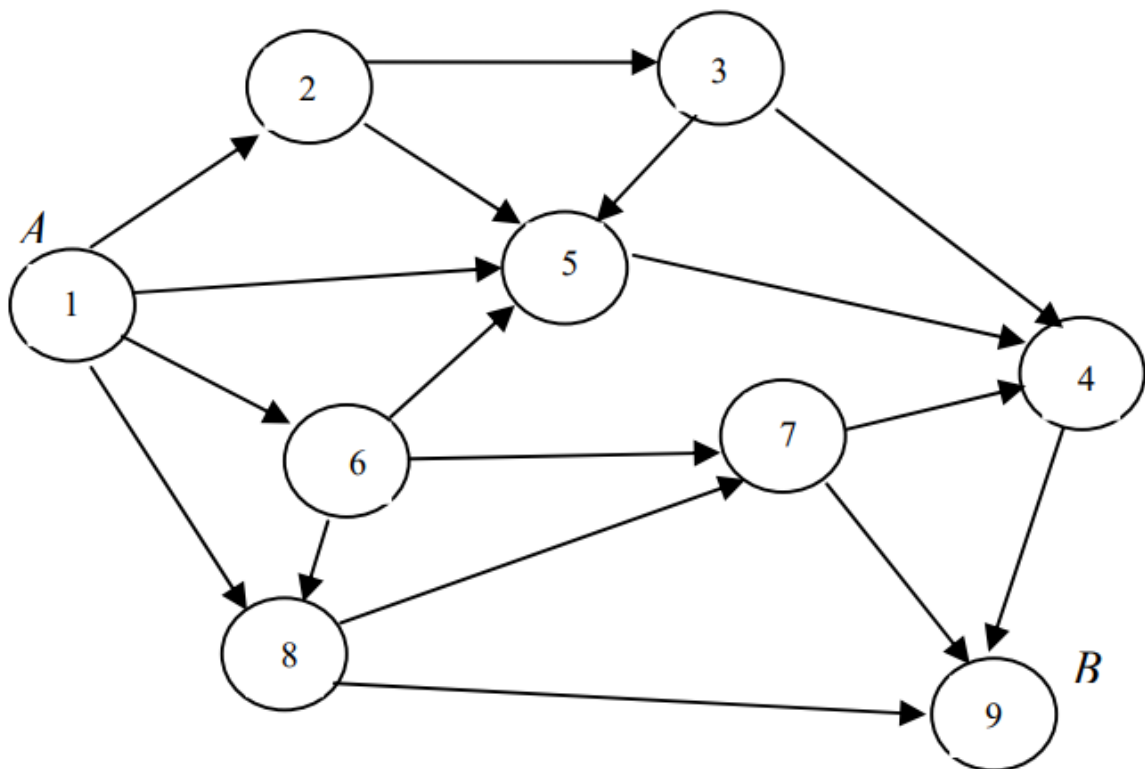


Таблица 9.3 - Численные значения расстояний между вершинами графа (по вариантам)

Ребро	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1-2	4	6	8	10	6	10	12	8	4	6
1-6	12	6	4	8	10	12	16	8	10	10
1-8	20	16	14	8	14	16	15	10	14	16
2-3	8	6	4	2	3	6	4	12	3	6
2-5	8	9	10	8	6	4	6	2	4	8
6-5	10	12	10	13	11	8	6	10	12	10
6-7	18	10	12	11	16	14	12	10	8	12
6-8	20	3	2	1	3	6	2	6	2	5
3-4	10	12	14	16	12	14	10	10	12	10
3-5	8	6	4	10	8	12	16	14	8	10
5-4	10	12	14	10	12	10	16	12	11	13
5-7	12	16	14	8	10	12	11	12	18	12
4-9	8	6	8	4	6	8	10	6	14	10
4-7	4	6	8	10	12	16	4	12	6	16
7-9	4	6	5	4	6	8	6	16	14	12
7-8	12	10	16	14	14	12	16	18	12	20
8-9	15	16	18	19	16	17	20	16	8	12

10. Оценка эффективности принятия управленческого решения при ликвидации чрезвычайной ситуации

Оценка эффективности принятия управленческого решения состоит из трех блоков [78]:

1. Выделение показателей и критериев оценки эффективности при ликвидации чрезвычайной ситуации;
2. Проведение многокритериального анализа;
3. Оценка эффективности решений.

Выделение показателей и критериев эффективности. На основе алгоритма работы должностных лиц командного центра определяются критерии и показатели, учет которых позволяет оценить эффективность решения задач управления при ликвидации ЧС.

Из выделенных критериев необходимо выбрать предпочтительные с точки зрения оценки эффективности задач принятия решений при ликвидации ЧС. Для отбора критериев привлекались эксперты, которым было предложено оценить 10 критериев по порядковой шкале: «1» – не важен, «2» – менее важен, «3» – важен, «4» – более важен [79].

1. Оперативность. Один из важных критериев оценки эффективности [79], который позволяет оценить время выполнения задач должностными лицами Командного центра при ликвидации чрезвычайной ситуации и включает в себя:

- время на доведение информации по иерархии $t_{и}$;
- принятие решения (анализ и оценка обстановки, взаимодействие со сторонними организациями, распоряжение на выезд) $t_{преш}$;
- время, затраченное на оповещение населения $t_{оп}$;
- время привлечения дополнительных сил и средств $t_{доп}$ (при необходимости);
- составление прогноза $t_{прог}$;
- формирование предложений $t_{форм}$;
- подготовка отчетных документов $t_{док}$.

Расчет времени производится в мин., время возникновения ЧС - $t_{ЧС}$. (время Ч).

Общее время ликвидации чрезвычайной ситуации можно рассчитать следующим образом [80]:

$$T_{общ} = t_{и} + t_{преш} + t_{оп} + t_{доп} + t_{прог} + t_{форм} + t_{док} \quad (10.1)$$

Общее время выполнения задач не должно превышать нормативное $T_{общ} \leq T_{норм}$. В противном случае процесс ликвидации будет происходить с задержкой, что повлечет за собой большие потери.

2. Рациональность распределения сил и средств (техники, личного состава и т.д.), которую можно определить путем отношения количества

задействованных сил и средств к ликвидации Q_3 к количеству достаточных сил и средств Q_0 , определенных формулой [81]:

$$R = \frac{Q_3}{Q_0} \cdot 100\% \quad (10.2)$$

Расчет достаточности сил и средств для ликвидации чрезвычайной ситуации проводится в соответствии с утвержденными нормативно-правовыми актами и иными документами, при котором должны учитываться наиболее неблагоприятные условия возникновения чрезвычайной ситуации.

Показатель рациональности распределения сил и средств, полученный при расчетах, должен стремиться к 100%, т.к. задействованные, но не примененные силы и средства могут быть необходимы на чрезвычайные ситуаций, возникших в то же время.

3. Полнота информации. Критерий позволяет оценить информацию, отраженную в оперативном плане объекта, который разрабатывается для информационной поддержки принятия решений при пожаре.

Критерий полноты информации рассчитывается следующим образом [82]:

$$I = \frac{W_{\phi}}{W_{уст}} \cdot 100\% \quad (10.3)$$

где W_{ϕ} – количество фактически заполненных разделов оперативного плана;
 $W_{уст}$ – количество нормативно установленных разделов оперативного плана.

Показатель полноты информации, не достигший 100 % указывает на то, что возможны два варианта:

- 1) отсутствие рисков возникновения чрезвычайных ситуаций, характерных для рассматриваемой территории (объекта);
- 2) отсутствие разделов, необходимых для отработки в любом оперативном плане.

4. Непрерывность управления. В каждом командном центре есть специалист, отвечающий за исправность технических средств, который при заступлении на службу обязан провести проверку. Критерий позволяет оценить возможность должностных лиц командного центра постоянно получать данные о чрезвычайных ситуациях, осуществлять взаимодействие с подразделениями.

Главным условием достижения непрерывности управления является постоянное знание обстановки, анализ и предвидение наиболее существенных изменений, которое возможно достичь путем безотказной работы технических средств и безошибочной работы должностных лиц.

Оценить непрерывность управления можно с помощью вероятности безотказной работы [83]:

$$P(t, \Delta t) = p_0(t, \Delta t) \cdot p_1(\Delta t) \quad (10.4)$$

где $p_0(t, \Delta t)$ – вероятность безотказной работы технических средств в интервале времени $(t, \Delta t)$;

$p_1(\Delta t)$ – вероятность безошибочной работы руководителя в течение времени Δt , при условии, что все технические средства работают штатном режиме.

Значение вероятности безотказной работы, стремящиеся к единице, указывает на слаженную и правильно построенную работу сотрудниками дежурной смены.

При решении многокритериальных задач, основную роль играют предпочтения ЛПР, которые в большинстве случаев имеют нечеткий характер, оценки альтернатив также задаются с погрешностью, которую необходимо учесть. Поэтому для решения подобных задач применяется теория нечетких множеств [79].

Прежде чем проводить операции с нечеткими множествами необходимо привести все критерии к одной единице измерения (%).

Так, критерий оперативность, представленный формулой (10.1), можно представить в виде [38]:

$$O = \frac{t_{\text{и}} + t_{\text{преш}} + t_{\text{оп}} + t_{\text{доп}} + t_{\text{прог}} + t_{\text{форм}} + t_{\text{док}}}{t_{\text{ин}} + t_{\text{прешн}} + t_{\text{опн}} + t_{\text{допн}} + t_{\text{прогн}} + t_{\text{формн}} + t_{\text{докн}}} \cdot 100\% \quad (10.5)$$

где значения знаменателя представляют нормативные значения времени выполнения задач.

Значение T , превышающее 100%, указывает на задержку по времени.

Критерий непрерывность управления определяется как вероятность, которую можно представить в процентах: 1–100%, 0,9–90% и т.д.

Для каждого из критериев, сформированы интервалы, соответствующие порядковой шкале со значениями: «частично, соответствует», «соответствует» (таблица 10.1).

Таблица 10.1 – Порядковая шкала критериев

	Оперативность	Рациональность	полнота	Непрерывность
Частично соответствует	[0,50]	[0,80]	[0,70]	[0,85]
Соответствует	[50,100]	[80,100]	[70,100]	[85,100]

Значения, относящиеся к шкале «соответствует» формируют область допустимых решений.

Таким образом, имеется универсальное множество A , заданное на области $[0...100]$, значения критериев X , R – свойство, указывающее на то, что значения полученных критериев принадлежат значениям по шкале, «соответствует» и функция принадлежности $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$ принимающая значения в интервале $[0,1]$.

Значения функции принадлежности для каждого элемента множества A представлены в таблице 10.2.

Таблица 10.2 - Нечеткое множество

$x(x \in X)$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mu_i(x)$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,9	1

Одной из важных составляющих процесса принятия решений является оценка его эффективности, которая определяется степенью достижения цели. Для оценки эффективности принятых решений применяется теория полезности, которая предполагает использование критерия эффективности, который формируется путем свертки частных критериев в один суперкритерий. Предполагается, что значения весовых коэффициентов для всех частных критериев равнозначны, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0,25$.

Таким образом, получим аддитивную свертку:

$$U = \frac{1}{4}(O + R + I + P) \quad (10.6)$$

Для оценки эффективности принятых решений необходимо сравнить полученные решения с эталонными. Таким образом, критерий эффективности будет равен:

$$\Xi = \frac{(O_{\Phi} + R_{\Phi} + I_{\Phi} + P_{\Phi})}{(O_{\Xi} + R_{\Xi} + I_{\Xi} + P_{\Xi})} \quad (10.7)$$

где $O_{\Phi} + R_{\Phi} + I_{\Phi} + P_{\Phi}$ – значения критериев, полученные фактически;
 $O_{\Xi} + R_{\Xi} + I_{\Xi} + P_{\Xi}$ – эталонные значения критериев (равные 100%).

Таким образом, полученные значения критерия эффективности можно интерпретировать следующим образом:

- 0,85 – 1 – работа сотрудников командного центра выполнена в соответствии с установленным регламентом;
- 0,65 – 0,85 – при выполнении задач возникали несущественные ошибки, информация собрана не в полном объеме, задержки во времени;
- 0 – 0,65 – работа построена не по установленному регламенту, существенные задержки при выполнении задач, нерациональное распределение сил и средств, недостаток информации, ошибки и сбои при управлении.

Пример. Необходимо оценить эффективность задач принятия решения оперативного дежурного командного центра при выполнении мероприятий по ликвидации чрезвычайной ситуации. В 10.10 ч. Поступила информация об аварии, в результате которой произошла разгерметизация автоцистерны, в которой находилось дизельное топливо. Оперативный дежурный, принимающий вызов, по возможности уточнил максимальную информацию, после чего в 10.11 ч. доложил старшему оперативному дежурному. Старший оперативный дежурный провел анализ поступившей информации, после чего в 10.15 ч. дал распоряжение личному составу на выезд к месту чрезвычайной ситуации. По прибытии подразделения на место вызова было выявлено, что

произошел разлив нефтепродуктов на суше, часть из которых попала в находящийся по пути следования водоем. Было принято решение привлечь сторонние организации, аварийно-спасательные формирования, привлекаемые при разливах нефти. В 10.20 ч. специалистом по учету сил и средств был проведен расчет необходимой привлекаемой техники в соответствии с планом ликвидации чрезвычайной ситуации и в 10.25 ч. дано распоряжение на привлечение соответствующих подразделений.

В 10.25 ч. Проведено оповещение населения, попадающего под опасные факторы. Оперативным дежурным подготовлен метеопрогноз и выводы о его влиянии на обстановку в районе чрезвычайной ситуации в 10.30 ч.

В результате анализа донесений было выявлено, что было привлечено 2 ед. техники (задействовано в работе – 2 ед.), привлечено 3 человека личного состава (задействовано в работе – 2). В ходе проверки информации было выявлено, что отсутствовала часть информационно-справочного материала (2,5 раздела из 3). В ходе ликвидации сбоев технических средств не обнаружено.

В соответствии с исходными данными, оцените эффективность задач принятия решений по выделенным критериям: оперативность, рациональность распределения сил и средств, полнота информации, непрерывность управления.

Решение.

По формуле 10.5 рассчитаем оперативность принятия решения:

$$O = \frac{1 + 5 + 10 + 5 + 2}{1 + 5 + 15 + 20 + 5} \cdot 100\% = 67,4\%$$

Затем определим рациональность распределения сил и средств по формуле 10.2:

$$R = \frac{2 + 2}{2 + 3} \cdot 100\% = 80\%$$

Полноту представленной информации определим по формуле 10.3:

$$I = \frac{2,5}{3} \cdot 100\% = 83\%$$

Непрерывность управления оценим с помощью формулы 10.4:

$$P(t, \Delta t) = p_0(t, \Delta t) \cdot p_1(\Delta t) = 100\%$$

Таким образом, полученные данные представим в таблице 10.3.

Таблица 10.3 – Расчетные значения

	Оперативность	Рациональность	полнота	Непрерывность
Частично соответствует	67,4	80	83	100
Соответствует	[50,100]	[80,100]	[70,100]	[85,100]

Из таблицы 10.3 видно, что полученные результаты принадлежат шкале соответствия. Критерий эффективности, рассчитанный по формуле 10.7 будет равен:

$$\Xi = \frac{(67,4 + 80 + 83 + 100)}{(100 + 100 + 100 + 100)} = \frac{0,25 \cdot 330,4\%}{0,25 \cdot 400\%} = 0,826$$

Полученное значение критерия эффективности позволяет сделать вывод о том, что при выполнении задач сотрудниками командного центра были выявлены недостатки: задержки по времени, нерациональность распределении сил и средств (не все из задействованных были привлечены к ликвидации аварии), недостаток информации в планах ликвидации.

Вопросы для самоконтроля

1. Из скольких блоков состоит оценка эффективности принятия управленческого решения?
2. Как определяется эффективность процесса принятия решений?
3. Как определяется критерии непрерывности управления?
4. На что указывает показатель полноты информации не достигшей 100%?
5. Каким образом оценивается рациональность распределения сил и средств?

11. Многокритериальные методы принятия решений

11.1 Выбор рационального состава аварийно-спасательного инструмента

Состав технических средств, применяемых при проведении аварийно-спасательных работ (АСР), определяется совокупностью функциональных задач, сложностью и объемами необходимых работ. При определении рационального состава технических средств придерживаются следующего алгоритма действий: в зависимости от функциональных задач определяют перечень типовых технологических операций, а уже исходя из специфики данных операций производят выбор рациональных типов технических средств, необходимых для их выполнения; в зависимости от сложности и объемов работ производят выбор технических средств соответствующих марок таким образом, чтобы они обладали оптимальными тактико-техническими характеристиками для рассматриваемых условий [84]. Рассмотрим пример выбора рационального состава гидравлического аварийно-спасательного инструмента (ГАСИ).

Оценка различных образцов инструмента производится в лабораторных условиях и на полигоне. При испытаниях в лабораторных условиях оценивается [85]:

- удобство обслуживания комплектов, объемы проверок перед применением и после применения;
- наличие эксплуатационной документации на русском языке;
- наличие комплектов ЗИП для проведения технического обслуживания инструмента;
- трудоемкость и частота проведения регламентных работ и проверок;
- необходимость применения специального инструмента;
- удобство и надежность транспортировки и хранения комплектов оборудования;
- разрешенная номенклатура ГСМ и гидрожидкостей;
- способность комплекта выполнять различные виды работ;
- приведенная характеристика гидроцилиндров (оценивается максимальная для комплекта) [85]:

$$K_{гц} = \frac{P \cdot S}{M} \quad (11.1)$$

где M – масса гидроцилиндра, кг;

P – максимальное усилие разжима, кН;

S – ход поршня, м;

- приведенная характеристика разжимов (оценивается максимальная для комплекта):

$$K_p = \frac{P \cdot F}{M} \quad (11.2)$$

где M – масса разжима, кг;

P – максимальное усилие разжима, кН;

F – максимальное раскрытие челюстей, м;

- приведенная характеристика кусачек (оценивается максимальная для комплекта) [85]:

$$K_k = \frac{P \cdot F}{M} \quad (11.3)$$

где M – масса кусачек, кг;

P – максимальное усилие резания, кН;

F – максимальное раскрытие челюстей, м;

- удельные характеристики насосных станций [85]:

$$K_{nc} = \frac{n \cdot Q}{M} \quad (11.4)$$

где M – масса гидростанции, кг;

n – количество одновременно работающих инструментов;

$n = 2$ – одновременная работа двумя инструментами;

$n = 1,5$ – последовательная работа двумя инструментами;

$n = 1$ – работа одним инструментом;

Q – производительность гидростанции, см³/мин.

– ограничения на экстремальные виды работ;

– количество типоразмеров различных видов инструмента;

– время 10 кратного перекусывания стального круглого образца;

– время полного раскрытия – закрытия инструмента на холостом ходу (без нагрузки).

При испытании оборудования в условиях работы на полигоне оценивается [86]:

– удобство работы инструментом (центровка, вес, габариты);

– удобство и простота подключения (стыковки) инструмента к насосной станции;

– надежность фиксации шлангов к насосной станции и инструменту;

– удобство раскладки и сворачивания гидросети;

– оценка возможности стыковки при перепадах температуры;

– удобство и надежность включения инструмента;

– надежность и простота запуска насосных станций;

– удобство переноски насосной станции к месту проведения работ.

Оценки по результатам испытаний выставляются высокопрофессиональными экспертами. Затем выводятся арифметические

оценки, на основе которых производится выбор рационального комплекса АСИ.

Выполнение АСР, как показывает опыт ликвидации последствий ЧС, предполагает применение определенных совокупностей технических средств, объединенных в комплекты и комплексы.

Комплектом технических средств, применяемых при проведении аварийно-спасательных работ, является совокупность взаимосвязанных технических средств, выполняющих определенную работу (технологическую операцию), представляющую собой, как правило, самостоятельную часть технологического процесса. В комплект включаются в первую очередь, средства, позволяющие выполнить заданный или прогнозируемый вид работ, причем средства подбираются таким образом, чтобы они могли обеспечить необходимую или заданную скорость проведения данных работ [80, 83].

Кроме того, комплектом технических средств является также совокупность технических средств, выполняющих различные технологические операции, но имеющих общий источник энергообеспечения (например, комплект пневмоинструмента).

Существенным признаком комплекса технических средств является то, что он представляет собой совокупность согласованно работающих под единым управлением и взаимно увязанных по производительности и другим показателям основных и вспомогательных технических средств, необходимых для выполнения конкретных задач (работ).

Рациональная структура комплекса технических средств должна быть определена исходя из потребности, с одной стороны, выполнить все технологические операции данного вида работ, а с другой стороны – из необходимости провести весь технологический процесс в пределах заданного времени t , рассчитанного для каждого рабочего места (участка работ).

Выбор комплектов и комплексов средств для проведения аварийно-спасательных работ включает в себя два этапа.

На первом этапе на основе прогноза объема работ, а также принятой технологии их производства, технологической структуры процесса или специализированного потока определяются требуемые эксплуатационные параметры основных технических средств, их типы и марки, перечень технологически необходимых вспомогательных средств и их типы.

Далее намечаются принципиальные схемы расстановки средств для механизации рабочего процесса.

Подбор технических средств выполняется на основе соответствия их главных эксплуатационных параметров требованиям к средствам для механизации АСР и технологии их производства. После этого определяются несколько возможных вариантов типов основных и соответствующих им вспомогательных средств.

На втором этапе производится выбор оптимального варианта комплекса средств на основе сравнения основного и дополнительного показателей.

При этом основным показателем является продолжительность производства работ, а дополнительным – удельные показатели массы, металло- и энергоемкости, рассчитанные на единицу часовой производительности комплекса средств, а также эксплуатационная надежность и мобильность средств [87].

Производится группировка основных видов работ, по принципу аналогии характера выполняемых работ и намечаемой технологии их производства. Для основных видов работ устанавливаются укрупненные технологические характеристики, объемы ожидаемых работ распределяются по группам, имеющим одинаковые технические характеристики. Составляется номенклатура процессов по видам работ или специализированным потокам при поточной организации работ. Из исходной номенклатуры технических средств подбирается состав и структура комплексов технических средств при соблюдении изложенной выше последовательности (рисунок 11.1).

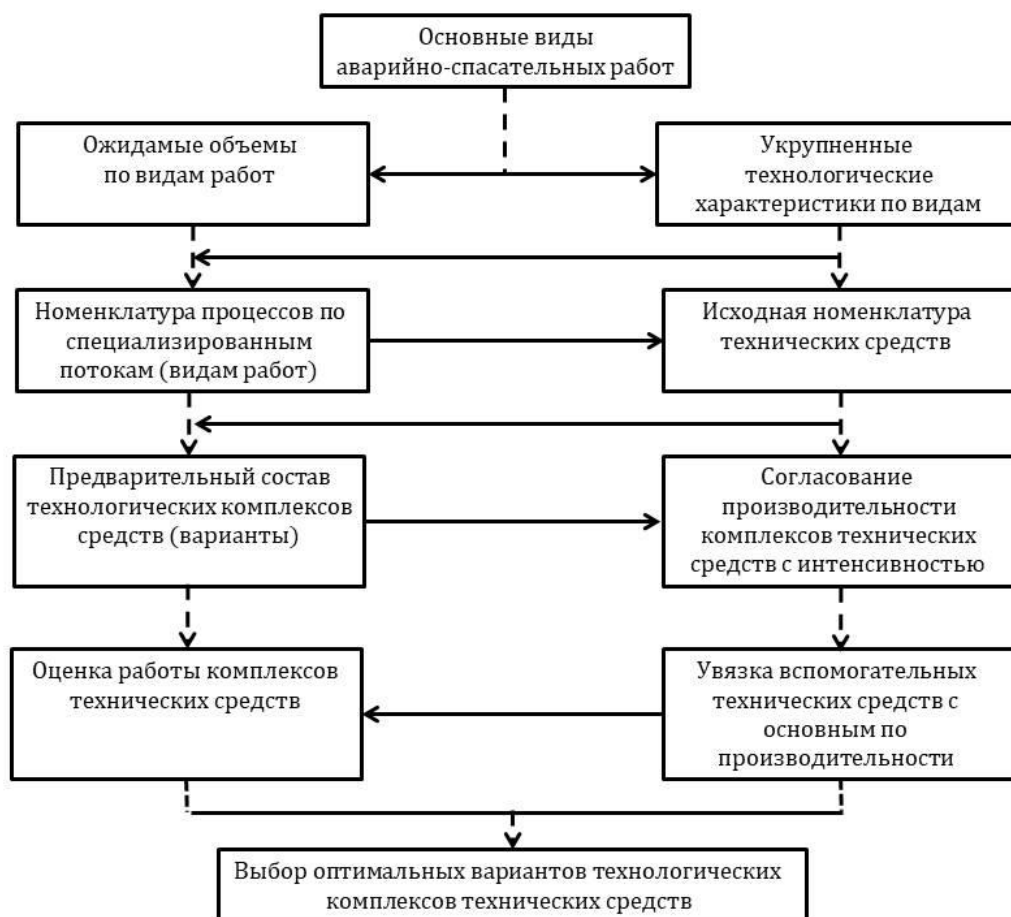


Рисунок 11.1 - Структурная схема подбора комплексов технических средств для ликвидации последствий ЧС

Выбор оптимального состава комплекса технических средств, оценка возможных результатов по выбранному комплексу могут производиться с помощью показателей эффективности комплексов технических средств.

Очевидно, что эффективность всего комплекса технических средств при выполнении работ будет зависеть от эффективности каждого (основного и вспомогательных) технического средства, входящего в данный комплекс. Критерием эффективности комплекса средств $K_{эф}$ может быть срок выполнения работы к фактически затрачиваемому комплексом технических средств времени на выполнение данной работы [88]:

$$K_{эф} = M \cdot \left(\frac{T_0}{T} \right) \quad (11.5)$$

где T_0 – допустимое время выполнения работ k -го вида ($k=1,2,\dots$);
 T – фактически затрачиваемое время на выполнение k -го вида работ.

Другим критерием эффективности комплекса технических средств может служить вероятность $P(Q, T)$ выполнения заданного объема работ за затраченное комплексом время T .

Непосредственно на месте работ может производиться уточнение состава и структуры комплектов и комплексов технических средств. Способность комплекса технических средств выполнять некоторую совокупность технологических операций при ликвидации последствий определенной ЧС можно представить как критерий «загрузки» комплекса.

Количество технических средств в комплексе не обязательно должно соответствовать количеству технологических операций, подлежащих «отработке». Применение универсальных технических средств позволяет минимизировать их состав в комплексе. При этом возможности выполнения технологических операций процесса работ могут быть обеспечены на требуемом уровне.

Таким образом, критерий «загрузки» является качественной характеристикой комплексов технических средств, подлежащей обязательному учету при определении их структуры и состава.

11.2 Определение наиболее рационального гидравлического аварийно-спасательного инструмента

Для гидравлического аварийно-спасательного инструмента фирмы «Holmatro» применяются различные пиктограммы. Эти символы показывают категорию аварии, для которой был разработан конкретный инструмент. Они могут использоваться как руководство для облегчения выбора правильного комплекта инструментов. В комплект входят челюстные расширители, челюстные резак, комбинированные челюстные резак, гидравлические цилиндры, клиновой домкрат, мини-резак, устройство для пережатия труб, комплект гидравлических домкратов, катушки для шлангов, подъемные подушки, пневматические домкраты, пневматическое оборудование для заделки течей опасных веществ.

Гидравлические цилиндры серии RAM изготавливаемые в нескольких десятках модификаций, отличаются грузоподъемностью от 45 до 200 кН, при высоте в сдвинутом положении от 450 до 680 мм. Они широко используются для перемещения различных крупногабаритных элементов завалов; при сходе с рельсов электровоза и вагонов, для закрепления кровли и перекрытий зданий, грозящих обвалом (таблица 11.1). Умелое сочетание использования гидроцилиндров и пневматических подушек позволяет эффективно ликвидировать аварию. Гидроцилиндры облегчают выполнение спасательных работ.

Таблица 11.1 - Гидравлические цилиндры

Технические характеристики	2004 U	2005 U	2006 U
Максимальное рабочее давление, МПа	72	72	72
Максимальное раздвигающее усилие, кН	161	161	161
Максимальное тяговое усилие, кН	49,5	49,5	49,5
Длина хода штока, мм	250	2·250	2·250
Масса, кг	12	15,5	18,5

Челюстные разжимы (Spreaders) выпускаются четырех модификаций – 2008AU, 2007AU2, 2003AU, 2010U. Они предназначены: для ведения спасательных работ в условиях ликвидации последствий обрушения зданий и сооружений, аварий на суше, в воде на глубине до 10 метров; для проделывания проходов в завалах путем подъема, перемещения элементов завала, разрезания листовой обшивки (таблица 11.2). Расширители 2003AU и 2010U позволяет пережимать трубы для устранения течи. При проведении монтажных работ возможно раздвигание, приподнимание и удерживание грузов в фиксированном положении.

Таблица 11.2 – Челюстные разжимы

Технические характеристики	2008 AU	2007 AU2	2003 AU	2010 U
Максимальное раздвигающее усилие, кН	55	140	174,8	219,7
Раскрытие челюстей, мм	832	680	832	675
Масса, кг	19	19	25	27

Челюстные резак (Cutters) выпускаются трех модификаций – 2011U, 2001U и 2009U. Они предназначены для ведения спасательных работ при ликвидации последствий землетрясений, аварий, катастроф на суше, в пресной и морской воде на глубине до 10 метров, проделывания проходов в завалах, перекусывания арматуры, перерезания листовой обшивки, для резки стоек крыш легковых и грузовых автомобилей. Челюстные резак, работающие на сжатие, могут дробить крупные элементы завалов с целью их обработки для погрузки в транспортное средство. Челюстные резак, работающие на раздвижение, могут перемещать крупные железобетонные элементы, а также другие материалы, находящиеся в завале или зажатые в обрушенных породах [83]. Раздвинутые челюстные резак, к которым

прикреплена стальная цепь, при их смыкании могут использоваться для перемещения разных элементов, особенно зажатых в обрушенной породе.

Таблица 11.3 - Гидравлические кусачки

Технические характеристики	2011 U	2001 U	2009 U
Максимальное усилие резания, кН	185,4	282,5	299,2
Раскрытие челюстей, мм	100	125	267
Масса, кг	9,5	12,0	15,0

Насосы (гидравлические станции) предназначены для создания высокого давления рабочей жидкости и ее подачи в необходимом количестве одному или двум гидравлическим инструментам (таблица 11.4). В качестве привода они имеют двигатель внутреннего сгорания, электродвигатель или пневматический.

Ножной насос FTW 1800 BU. В состав комплектов ГАСИ обязательно включаются в качестве резервных насосы высокого давления с ручным или ножным приводом (таблица 11.4).

Таблица 11.4 – Характеристики гидравлических насосных станций

Технические характеристики	PPU-10	FTW1800BU
Количество одновременно работающих инструментов, ед.	1-2	1
Производительность гидростанции, см ³ /мин	650	2,3
Масса, кг	19,5	11,5

Проведем расчеты по рациональному выбору гидравлического аварийно-спасательного инструмента.

1. Проведем оценку приведенной характеристики гидроцилиндров:

- марки 2004 U:

$$K_{гц2004} = \frac{161 \cdot 0,25}{12} = 3,4$$

- марки 2005U:

$$K_{гц2005} = \frac{161 \cdot 0,5}{15,5} = 5,2$$

- марки 2005U:

$$K_{гц2006} = \frac{161 \cdot 0,5}{18,5} = 4,4$$

Наиболее рациональным гидроцилиндром является – гидроцилиндр 2005U.

2. Проведем оценку приведенной характеристики разжимов:

- разжим 2008 AU:

$$K_{p2008} = \frac{55 \cdot 0,832}{19} = 2,4$$

- разжим 2007 AU2:

$$K_{p2007} = \frac{140 \cdot 0,680}{19} = 5,0$$

- разжим 2003 AU:

$$K_{p2003} = \frac{174,8 \cdot 0,832}{25} = 5,8$$

- разжим 2010U:

$$K_{p2010} = \frac{219,7 \cdot 0,675}{27} = 5,5$$

Наиболее рациональным разжимом является - разжим 2003 AU.

3. Проведем оценку приведенной характеристики кусачек:

- кусачки 2011 U:

$$K_{k2011} = \frac{185,4 \cdot 0,1}{9,5} = 1,9$$

- кусачки 2001 U:

$$K_{k2001} = \frac{282,5 \cdot 0,125}{12} = 2,9$$

- кусачки 2009U:

$$K_{k2009} = \frac{299,2 \cdot 0,267}{15} = 5,3$$

Наиболее рациональными кусачками являются - кусачки 2009U.

4. Проведем оценку приведенной характеристики насосной станции:

- насосная станция RPU-10:

$$K_{\text{нс10}} = \frac{2 \cdot 650}{19,5} = 66,7$$

- насосная станция FTW1800BU:

$$K_{\text{нс1800}} = \frac{1 \cdot 2,3}{11,5} = 0,2$$

Наиболее рациональной насосной станцией является – гидравлическая насосная станция RPU-10.

Таким образом, рассмотренная методика позволяет определить наиболее рациональный состав аварийно-спасательного оборудования для ликвидации чрезвычайных ситуаций и их последствий.

11.3 Многокритериальный выбор пожарной техники

Проблемы, связанные с отысканием наилучших решений для достижения поставленных целей при ограниченных возможностях (ресурсах), вставали перед людьми всегда. Концепция принятия решения в качестве первичного элемента деятельности рассматривает решение как сознательный выбор одного из ряда вариантов (альтернатив, планов, стратегий и т.д.) [88].

До недавних времен считалось, что выработка решения является искусством, основанным на опыте, знаниях и интуиции лица принимающего решения (ЛПР). Однако в современных условиях одного этого недостаточно для выработки даже просто не очень плохих решений в сложных, масштабных, ответственных практических задачах. Поэтому стали интенсивно развиваться научные методы анализа решений, появились новые прикладные научные дисциплины – исследование операций, теория принятия решений, системный анализ, в рамках которых созданы специальные информационно-аналитические технологии, опирающиеся на новые математические методы [89].

Применение математических методов предполагает построение математической модели объекта анализа. При построении модели ситуации принятия решения дается формализованное описание доступных вариантов действий и возможных последствий их реализации. При этом особое внимание уделяется выявлению и описанию предпочтений ЛПР. Его цели чаще всего моделируются стремлением к увеличению или же уменьшению специальных функций, называемых критериями (а также показателями эффективности или качества, целевыми функциями).

В относительно простых случаях удастся обойтись одним критерием. И тогда наилучшим, или оптимальным, вариантом считается тот, который

максимизирует или же минимизирует этот критерий. В качестве примера укажем на задачу планирования перевозок, известную под названием «транспортная задача». Состоит она в следующем. Имеются склады, на каждом из которых хранится определенное количество (запас) некоторого однородного материала (песка, угля, зерна и т.п.). Имеются также заказчики, для каждого из которых известен его запрос (потребность, заявка) на определенное количество этого материала. Предполагается, что суммарные запасы на складах равны сумме запросов потребителей [90].

Под планом перевозок понимается указание, сколько материала следует доставить (перевезти) с каждого склада тому или иному потребителю, причем запросы всех потребителей должны быть удовлетворены (при этом запасы всех складов окажутся исчерпанными). Известны стоимости перевозки единицы материала с каждого склада каждому потребителю.

Требуется составить такой план, чтобы суммарная стоимость перевозок (это и есть критерий) была минимальной. Однако в более сложных случаях обойтись одним критерием не удастся, и тогда задача называется многокритериальной. Например, в задаче выбора места для нового предприятия необходимо учитывать экономические, социальные, экологические и иные последствия, каждое из которых может характеризоваться одним или же несколькими критериями. Даже большинство бытовых задач многокритериальны. Так, при выборе нового платья помимо его цены учитываются модность покроя, качество материала, то, как оно «сидит», и пр.

Принципиальная сложность многокритериальных задач состоит в том, что обычно не существует варианта, который был бы наилучшим сразу по всем критериям: если по одному из критериев вариант очень хорош, то по другому, как правило, он будет далеко не лучший. Так, если в транспортной задаче учитывать не только стоимость, но и время перевозок, то более быстрая доставка (скажем, авиатранспортом) будет весьма дорогой, а более дешевая (например, водным транспортом) займет много времени. И поэтому выбор наилучшего варианта связан с необходимостью разрешения центральной в теории принятия решений при многих критериях проблемы замещений (компенсации), т.е. проблемы сопоставления по предпочтительности (с точки зрения ЛПР!) потерь по одним критериям с выигрышами по другим [91].

Она решается по-разному в рамках различных методов многокритериальной оптимизации.

Многообразие многокритериальных задач породило огромное число методов их анализа. Одним из основных понятий, используемых в подавляющем большинстве таких методов, является понятие относительной, или сравнительной, важности (весомости, значимости) критериев. Однако никаких строгих (формальных) определений этого понятия разработчики методов не давали, ограничиваясь интуитивными представлениями о нем.

Вообще проблема строгого определения понятия «важность» является одной из самых «старых» проблем в исследовании операций, которая длительное время не поддавалась усилиям исследователей. В некоторых научных работах даже высказывалось мнение о том, что в принципе невозможно найти математически обоснованное, психологически приемлемое и практически полезное определение этого понятия. И, тем не менее, многолетние исследования «проблемы важности» увенчались успехом.

Вначале были сформулированы определения понятий «Один критерий важнее другого» и «Критерии равноважны» (т.е. имеют одинаковую важность) и развита теория «качественной важности». А затем на основе этой теории удалось предложить определение понятия «Один критерий важнее другого во столько-то раз» и разработать теорию «количественной важности» [53].

Таким образом, можно сказать, что были созданы основы теории важности критериев (ТБК). В настоящее время эта теория продолжает интенсивно «достраиваться».

Математическая модель ситуации принятия решения при многих критериях включает следующие три элемента: множество вариантов V , векторный критерий K и отношения предпочтения и безразличия ЛПР, которые будут обозначаться соответственно буквами P и I с нижними или верхними индексами.

Разберем содержание модели. Каждый вариант v из множества всех вариантов V характеризуется значениями критериев K_i , $i = 1, \dots, m$, которые называются частными и, будучи записаны по порядку, составляют векторный критерий $K = (K_1, \dots, K_m)$. Под критерием K_i понимается функция, определенная на V и принимающая значения из множества X_i , называемого шкалой φ , а также множеством оценок, градаций по этому критерию. В общем случае шкала может иметь произвольную природу: оценки могут быть числовыми (скажем, годовая прибыль фирмы в млн тг.), словесными (например, «очень высокий уровень обслуживания», «высокий уровень обслуживания», ...), символьными (в частности, для характеристики отелей используют оценки *****, ****, ...) и т.д. Существенно лишь то, что эти оценки упорядочены по предпочтительности. Но для простоты и единообразия изложения далее будем полагать, что шкалы всех критериев – числовые, причем большие их значения предпочтительнее меньших. Это допущение, как будет ясно из дальнейшего, не ограничивает общности изложения [33].

Таким образом, каждый вариант v характеризуется m оценками по критериям, т.е. значениями этих критериев $K_1(v), \dots, K_m(v)$. Эти числа составляют вектор $(K_1(v), \dots, K_m(v))$, который называется векторной оценкой варианта. Для векторной оценки варианта v будем использовать двоякое обозначение – либо $K(v)$, либо $x(v)$ – как будет удобнее «по месту», так что можно записать равенства [34]:

$$K(v) = (K_1(v), \dots, K_m(v)) = x(v) = (x_1(v), \dots, x_m(v)) \quad (11.6)$$

Рассмотрим такой пример. Предположим, что вам необходимо приобрести пожарную автомашину (АЦ), выслушав все пожелания, продавец предложил три вида АЦ А, Б и В. Цена и все интересующие вас основные их характеристики примерно одинаковы, кроме максимальной емкости цистерны (л) и экономичности (км/л). Значения этих двух характеристик запишем в таблицу 11.5.

Таблица 11.5 - Значения исходных критериев

Марка автомобиля	Максимальная емкость цистерны K_1	Экономичность K_2
А	7000	21
Б	5500	29
В	4500	19

Определим нормированные значения характеристик-критериев по формуле:

$$\hat{K}_1 = \frac{K_1}{K_1^*}, \hat{K}_2 = \frac{K_2}{K_2^*}, \quad (11.7)$$

При этом необходимо учесть, что $K_1^* = 7000$, а $K_2^* = 29$ полученные значения занесли в таблицу 11.2.

Примем, что обе характеристики для нас примерно одинаково значимы, и поэтому приняли величины коэффициентов важности $a_1 = a_2 = 1/2$.

Определим значения обобщенного критерия F для всех пожарных машин по формуле [35]:

$$F = 0,5 \cdot \hat{K}_1 + 0,5 \hat{K}_2 \quad (11.8)$$

Таблица 11.6 -Значения нормализованных и обобщенных критериев

Марка автомобиля	$\hat{K}_1 = \frac{K_1}{K_1^*}$	$\hat{K}_2 = \frac{K_2}{K_2^*}$	$F = 0,5 \cdot \hat{K}_1 + 0,5 \cdot \hat{K}_2$
А	1,00	0,72	0,86
Б	0,78	1,00	0,89
В	0,64	0,65	0,67

Поскольку самое большое значение обобщенного критерия F оказалось для пожарной машины $Б$, то стало ясно, что именно ее «рекомендует» приобрести использованный метод.

11.4 Модель рационального распределения пожарных автомобилей в противопожарных подразделениях

Одним из основных технических средств обеспечения пожарной безопасности являются пожарные автомобили. Готовность оперативного реагирования пожарных автоцистерн (АЦ) зависит от многих факторов, в том числе от сроков эксплуатации.

Нередко перед ЛПР возникает вопрос рационального распределения вновь закупаемых АЦ среди противопожарных подразделений.

Рациональное распределение АЦ, необходимых в территориальных противопожарных подразделениях с учетом сроков их эксплуатации, предлагается рассчитывать по следующей формуле [54]:

$$R_{\text{АЦ}} = \frac{N_{\text{общ.АЦ}}}{\sum N_{\text{треб.АЦ}}} \cdot k_{\text{к}} \quad (11.9)$$

где $N_{\text{общ.АЦ}}$ – общее количество закупаемых АЦ;

$\sum N_{\text{треб.АЦ}}$ – суммарная потребность закупки АЦ по всем территориальным подразделениям;

$k_{\text{к}}$ – коэффициент катастрофичности, определяемый как сумма критериев k_1 , k_2 , k_3 с учетом сроков эксплуатации АЦ. Коэффициент $k_{\text{к}}$ измеряется от 1 (наименьшая катастрофичность) до 3 (наибольшая катастрофичность):

$$k_{\text{к}} = 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 3 \cdot k_3 \quad (11.10)$$

где k_1 – количество АЦ со сроком эксплуатации от 10 до 15 лет;

k_2 – количество АЦ со сроком эксплуатации от 15 до 20 лет;

k_3 – количество АЦ со сроком эксплуатации более 20 лет.

Пример. Департаментом по чрезвычайным ситуациям планируется закупить 60 ед. АЦ. При этом установлено, что в 20 подразделениях 74 ед. АЦ эксплуатируются более 10 лет и подлежат замене. Необходимо рационально распределить вновь закупаемые АЦ между противопожарными подразделениями с учетом сроков эксплуатации АЦ. Результаты расчета представлены в таблице 11.7.

Таблица 11.7 – Результаты моделирования рационального распределение АЦ, необходимых в территориальных противопожарных подразделениях

№	Наименование	10-15 лет	15-20 лет	Более 20 лет	k_1	k_2	k_3	$k_{\text{к}}$	$N_{\text{треб.АЦ}}$	$R_{\text{АЦ}}$
1.	СПЧ-1	2	1	1	2	2	3	7	4	3
2.	СПЧ-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3.	СПЧ-3	1	3	1	1	6	3	10	5	4
4.	ПП-4	0	1	2	0	2	6	8	3	2
5.	ПЧ-5	0	1	0	0	2	0	2	1	1

Продолжение таблицы 11.7

6.	ПЧ-6	1	0	1	1	0	3	4	2	2
7.	ПЧ-7	1	2	0	1	4	0	5	3	2
8.	ПЧ-8	1	1	0	1	2	0	3	2	2
9.	ПЧ-9	7	5	3	7	10	9	26	15	12
10.	ПЧ-10	0	3	2	0	6	6	12	5	4
11.	ПЧ-11	0	1	1	0	2	3	5	2	2
12.	ПЧ-12	1	2	1	1	4	3	8	4	3
13.	ПЧ-13	2	1	0	2	2	0	4	3	2
14.	ПЧ-14	1	3	3	1	6	9	16	7	5
15.	ПЧ-15	0	1	1	0	2	3	5	2	2
16.	ПЧ-16	3	1	0	3	2	0	5	4	3
17.	ПЧ-17	2	0	0	2	0	0	2	2	2
18.	ПЧ-18	2	0	0	2	0	0	2	2	2
19.	ПЧ-19	1	4	1	1	8	3	12	6	5
20.	ПЧ-20	0	1	1	0	2	3	5	2	2
	Итого	25	31	18	25	62	54	141	74	60

Вывод. Предложенная модель позволяет с учетом сроков эксплуатации рационально произвести распределение вновькупаемых АЦ.

Задание для самостоятельной работы

Планируется закупить 18 ед. АЦ. При этом установлено, что в подразделениях эксплуатируются более 10 лет N АЦ и подлежат замене. Необходимо рационально распределить вновькупаемые АЦ между противопожарными подразделениями с учетом сроков эксплуатации АЦ. Данные представлены в таблице 11.8.

Таблица 11.8 – Данные для расчета

№ варианта	Наименование	Всего АЦ	10-15 лет	15-20 лет	Более 20 лет
1.	СПЧ-1	12	1	2	3
	СПЧ-2	13	1	2	1
	ПЧ-3	15	1	1	1
2.	СПЧ-1	11	2	3	0
	ПЧ-2	10	2	1	1
	СПЧ-3	9	2	2	0
3.	ПЧ-1	8	2	1	2
	СПЧ-2	7	2	2	1
	СПЧ-3	4	1	1	1
4.	ПЧ-1	7	3	2	1
	СПЧ-2	3	1	1	1
	СПЧ-3	4	0	2	1
5.	ПЧ-1	5	2	1	1
	СПЧ-2	6	1	3	1
	СПЧ-3	7	2	1	1

12. Математическая модель транспортной задачи

Методы линейного программирования применяются для решения многих экстремальных задач, с которыми довольно часто приходится иметь дело в экономике. Решение таких задач сводится к нахождению крайних значений (максимума и минимума) некоторых функций переменных величин.

Линейное программирование основано на решении системы линейных уравнений (с преобразованием в уравнения и неравенства), когда зависимость между изучаемыми явлениями строго функциональна. Для него характерны математическое выражение переменных величин, определенный порядок, последовательность расчетов (алгоритм), логический анализ.

Применять его можно только в тех случаях, когда изучаемые переменные величины и факторы имеют математическую определенность и количественную ограниченность, когда в результате известной последовательности расчетов происходит взаимозаменяемость факторов, когда логика в расчетах, математическая логика совмещаются с логически обоснованным пониманием сущности изучаемого явления. С помощью этого метода в промышленном производстве, например, исчисляется оптимальная общая производительность машин, агрегатов, поточных линий (при заданном ассортименте продукции и иных заданных величинах), решается задача рационального раскроя материалов (с оптимальным выходом заготовок).

Все экономические задачи, решаемые с применением линейного программирования, отличаются альтернативностью решения и определенными ограничивающими условиями. Решить такую задачу - значит выбрать из всех допустимо возможных (альтернативных) вариантов лучший, оптимальный. Важность и ценность использования метода линейного программирования состоят в том, что оптимальный вариант выбирается из весьма значительного количества альтернативных вариантов. При помощи других способов решать такие задачи практически невозможно. Весьма типичной задачей, решаемой с помощью линейного программирования, является транспортная задача [73].

Транспортная задача (transportation problem) - одна из наиболее распространенных задач математического программирования (обычно - линейного). В общем виде ее можно представить так: требуется найти такой план доставки аварийно-спасательного оборудования, техники и другого имущества необходимого для ликвидации чрезвычайной ситуаций, чтобы суммарная дальность, или объем транспортной работы в тонно-километрах была наименьшей. Следовательно, дело сводится к наиболее рациональному прикреплению производителей к потребителям и наоборот [82].

Простейшими транспортными задачами являются задачи о перевозках некоторого однородного груза из пунктов отправления в пункты назначения (к потребителям) при обеспечении минимальных затрат на перевозки. Обычно начальные условия таких задач записывают в таблицу. Например,

для поставщиков и потребителей такая задача имеет следующий вид (таблица 12.1):

Таблица 12.1 - Построение транспортной таблицы

	B_1	B_2	...	B_n	a_i
A_1	x_{11} C_{11}	x_{12} C_{12}	...	x_{1n} C_{1n}	a_1
A_2	x_{21} C_{21}	x_{22} C_{22}	...	x_{2n} C_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	x_{m1} C_{m1}	x_{m2} C_{m2}	...	x_{mn} C_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_n	$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$

Здесь показатели X_{ij} означают затраты средств для доставки аварийно-спасательного оборудования и техники от i -го поставщика до j -го потребителя, пункт отправления A_i в которых соответственно находятся $a_1, a_2, \dots, a_m$ количество аварийно-спасательных средств к потребителям B_j потребности которых составляют $b_1, b_2, \dots, b_n$. $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

Математически задача сводится к нахождению минимума целевой функции, выражающей суммарные затраты на доставку аварийно-спасательной техники и оборудования, т.е. функции [85]:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} \cdot X_{ij} \rightarrow \min \quad (12.1)$$

где C_{ij} – затраты по доставке из пунктов отправления – A_i в пункты назначения – B_j .

Затраты задаются соответствующей матрицей [86]:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{2n} \\ C_{m1} & C_{m2} & C_{mn} \end{pmatrix} \quad (12.2)$$

Алгоритм решения транспортной задачи выполняется в несколько этапов:

- 1) Построение транспортной таблицы;
- 2) Проверка задачи на закрытость;
- 3) Составление опорного плана;
- 4) Проверка опорного плана на вырожденность;

- 5) Вычисление потенциалов для плана перевозки;
- 6) Проверка опорного плана на оптимальность;
- 7) Перераспределение поставок;
- 8) Если оптимальное решение найдено, переходим к пункту 9, если нет – к пункту 5;
- 9) Вычисление общих затрат на перевозку груза;
- 10) Построение графа перевозок.

Рассмотрим пример определения наиболее рациональной доставки аварийно-спасательного оборудования. Предположим, что произошло крупное землетрясение, для ликвидации последствий чрезвычайной ситуации и проведения аварийно-спасательных работ создано 4 участка, потребность которых составляет $B_1=30$ ед., $B_2=25$ ед., $B_3=35$ ед., $B_4=20$ ед. В целях бесперебойной работы данных участков необходимо обеспечить их аварийно-спасательным оборудованием из 3 ближайших населенных пунктов. Пусть в населенном пункте A_1 имеется 50 ед. средств, на базе A_2 – 40 ед., на базе A_3 – 20 ед. Затраты по доставке единицы груза из каждого населенного пункта в соответствующие участки ликвидации чрезвычайной ситуации заданы матрицей тарифов (таблица 12.2).

Таблица 12.2 – Матрица затрат

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	2	4	6
A_2	2	3	1	2
A_3	3	2	7	4

Необходимо разработать план доставки аварийно-спасательных средств с наименьшими затратами.

Решение.

Составим распределительную таблицу 12.3.

Таблица 12.3 – Распределительная таблица

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3	2	4	6	50
A_2	2	3	1	2	40
A_3	3	2	7	4	20
Потребность	30	25	35	20	110

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 50 + 40 + 20 = 110$$

$$\sum_{j=1}^4 b_j = 30 + 25 + 35 + 20 = 110$$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$$

Условие баланса соблюдается. Запасы равны потребностям. Следовательно, модель транспортной задачи является закрытой.

Первая итерация заключается в определении исходного опорного плана и проверке его на оптимальность.

Определение исходного опорного плана. Первый опорный план может быть найден посредством различных способов: по правилу северо-западного угла, приоритету ближайших пунктов, способу минимального элемента $C=(c_{ij})$, способу Фогеля и по способу Лебедева-Тихомирова [87].

Этап I. Поиск первого опорного плана.

1. Используя метод северо-западного угла, построим первый опорный план транспортной задачи (таблица 12.4).

План начинается заполняться с верхнего левого угла.

Искомый элемент равен $c_{11}=3$. Для этого элемента запасы равны 50, потребности 30. Поскольку минимальным является 30, то вычитаем его. $x_{11} = \min(50,30) = 30$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3	2	4	6	50-30=20
A_2	х	3	1	2	40
A_3	х	2	7	4	20
Потребность	30-30=0	25	35	20	110

Искомый элемент равен $c_{12}=2$. Для этого элемента запасы равны 20, потребности 25. Поскольку минимальным является 20, то вычитаем его. $x_{12} = \min(20,25) = 20$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3	2	4	6	20-20=0
A_2	х	3	1	2	40
A_3	х	2	7	4	20
Потребность	0	25-20=5	35	20	110

Искомый элемент равен $c_{22}=3$. Для этого элемента запасы равны 40, потребности 5. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его. $x_{22} = \min(40,5) = 5$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3	2	х	х	0
A_2	х	3	1	2	40-5=35
A_3	х	2	7	4	20
Потребность	0	5-5=0	35	20	110

Искомый элемент равен $c_{23}=1$. Для этого элемента запасы равны 35, потребности 35. Поскольку минимальным является 35, то вычитаем его.
 $x_{23} = \min(35,35) = 35$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3	2	х	х	0
A_2	х	3	1	х	35-35=0
A_3	х	х	7	4	20
Потребность	0	0	35-35=0	20	110

Искомый элемент равен $c_{34}=4$. Для этого элемента запасы равны 20, потребности 20. Поскольку минимальным является 20, то вычитаем его.
 $x_{34} = \min(20,20) = 20$

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3	2	х	х	0
A_2	х	3	1	х	35-35=0
A_3	х	х	7	4	20-20=0
Потребность	0	0	0	20-20=0	110

Далее, согласно алгоритму, ищем элементы среди не вычеркнутых.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3	2	4	6	50
A_2	2	3	1	2	40
A_3	3	2	7	4	20
Потребность	30	25	35	20	110

Искомый элемент равен $c_{13}=4$, но т.к. ограничения выполнены, то $x_{13}=0$.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3 [30]	2 [20]	4 [0]	6	50
A_2	2	3 [5]	1 [35]	2	40
A_3	3	2	7	4 [20]	20
Потребность	30	25	35	20	110

В результате получен первый опорный план, который является допустимым, так как все средства из населенных пунктов вывезены, потребность участков ликвидации последствий землетрясения удовлетворена, а план соответствует системе ограничений транспортной задачи.

2. Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 6, а должно быть $m + n - 1 = 6$. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$F_x = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 5 + 1 \cdot 35 + 4 \cdot 20 = 260$$

Этап II. Улучшение опорного плана.

Проверим оптимальность опорного плана.

Найдем предварительные потенциалы u_i, v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что

$$u_1 = 0; u_1 + v_1 = 3; 0 + v_1 = 3; v_1 = 3$$

$$u_1 + v_2 = 2; 0 + v_2 = 2; v_2 = 2$$

$$u_2 + v_2 = 3; 2 + u_2 = 3; u_2 = 1$$

$$u_2 + v_3 = 1; 1 + v_3 = 1; v_3 = 0$$

На данном этапе возникла ситуация, когда для оставшихся занятых клеток не известно ни одного из потенциалов. Это результат вырожденности решения. Для его преодоления в одну из клеток нужно внести нулевую поставку, таким образом, такая клетка станет условно занятой.

Для неизвестного потенциала u_3 нулевую поставку можно разместить в клетках:

$$(3;1), v_1 = 3$$

$$(3;2), v_2 = 2$$

$$(3;3), v_3 = 0$$

Для неизвестного потенциала v_4 нулевую поставку можно разместить в клетках:

$$(1;4), u_1 = 0$$

$$(2;4), u_2 = 1$$

Среди этих клеток, в которых может быть размещена нулевая поставка, наименьший тариф имеет клетка (2, 4) с $c_{24} = 2$. Следовательно, нулевую поставку размещаем в клетку (2, 4), и она становится условно занятой.

$$u_2 + v_4 = 2; 1 + v_4 = 2; v_4 = 1$$

Ранее поставленный псевдоноль из ячейки (1;3) убираем.

$$u_3 + v_4 = 4; 1 + u_3 = 4; u_3 = 3$$

	$v_1 = 3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 1$
$u_1 = 0$	3 [30]	2 [20]	4	6
$u_2 = 1$	2	3 [5]	1 [35]	2 [0]
$u_3 = 3$	3	2	7	4 [20]

Опорный план не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых

$$u_i + v_j > c_{ij}$$

$$(2;1): 1 + 3 > 2; \Delta_{21} = 1 + 3 - 2 = 2 > 0$$

$$(3;1): 3 + 3 > 3; \Delta_{31} = 3 + 3 - 3 = 3 > 0$$

$$(3;2): 3 + 2 > 2; \Delta_{32} = 3 + 2 - 2 = 3 > 0$$

$$\max(2,3,3) = 3$$

Выбираем максимальную оценку свободной клетки (3;1): 3

Для этого в перспективную клетку (3;1) поставим знак «+», а в остальных вершинах многоугольника чередующиеся знаки «-», «+», «-».

Цикл приведен в таблице (3,1 → 3,4 → 2,4 → 2,2 → 1,2 → 1,1).

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3 [30] [-]	2 [20] [+]	4	6	50
A_2	2	3 [5] [-]	1 [35]	2 [0] [+]	40
A_3	3 [+]	2	7	4 [20] [-]	20
Потребность	30	25	35	20	110

Из средств x_{ij} стоящих в минусовых клетках, выбираем наименьшее, т.е. $y = \min(2, 2) = 2$. Прибавляем 2 к объемам грузов, стоящих в плюсовых клетках и вычитаем 2 из x_{ij} , стоящих в минусовых клетках. В результате получим новый опорный план.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Наличие средств
A_1	3 [25]	2 [25]	4	6	50
A_2	2	3	1 [35]	2 [5]	40
A_3	3 [5]	2	7	4 [15]	20
Потребность	30	25	35	20	110

Проверим оптимальность опорного плана. Найдем предварительные потенциалы u_i, v_j по занятым клеткам таблицы, в которых $u_i + v_j = c_{ij}$, полагая, что

$$u_1 = 0.$$

$$u_1 + v_1 = 3; 0 + v_1 = 3; v_1 = 3$$

$$u_3 + v_1 = 3; 3 + u_3 = 3; u_3 = 0$$

$$u_3 + v_4 = 4; 0 + v_4 = 4; v_4 = 4$$

$$u_2 + v_4 = 2; 4 + u_2 = 2; u_2 = -2$$

$$u_2 + v_3 = 1; -2 + v_3 = 1; v_3 = 3$$

$$u_1 + v_2 = 2; 0 + v_2 = 2; v_2 = 2$$

	$v_1 = 3$	$v_2 = 2$	$v_3 = 0$	$v_4 = 4$
$u_1 = 0$	3 [25]	2 [25]	4	6
$u_2 = -2$	2	3	1 [35]	2 [5]
$u_3 = 0$	3 [5]	2	7	4 [15]

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $u_i + v_j \leq c_{ij}$.

Минимальные затраты составят:

$$F_x = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 15 = 245$$

Вывод: Из 1-го населенного пункта необходимо направить аварийно-спасательное оборудование в 1-й участок ликвидации последствий землетрясения (25 ед.), во 2-й участок (25 ед.).

Из 2-го населенного пункта необходимо направить аварийно-спасательное оборудование в 3-й участок (35 ед.), в 4-й участок (5 ед.).

Из 3-го населенного пункта необходимо направить аварийно-спасательное оборудование в 1-й участок (5 ед.), в 4-й участок (15 ед.).

Оптимальный план доставки аварийно-спасательного оборудования в 4 участка ликвидации последствий землетрясения, в виде графа представлен на рисунке 12.1.

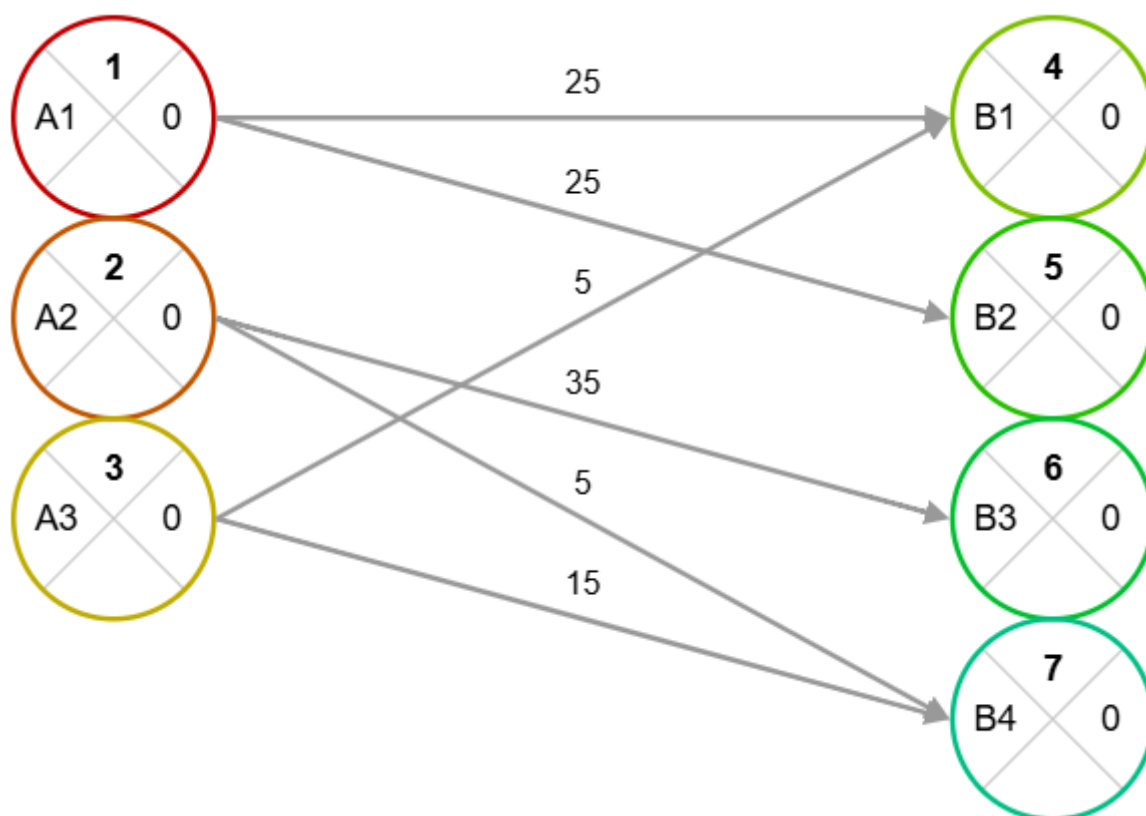


Рисунок 12.1 – Граф оптимального плана доставки аварийно-спасательного оборудования

Задание для самостоятельной работы

Произошло крупное землетрясение, для ликвидации чрезвычайной ситуации создано 3 участка, потребность которых составляет $B_1=20$ ед., $B_2=35$ ед., $B_3=15$ ед. В целях бесперебойной работы данных участков необходимо обеспечить их аварийно-спасательных оборудованием из 3 ближайших подразделений. Пусть в населенном пункте A_1 имеется 30 ед. средств, на базе A_2 – 25 ед., на базе A_3 – 15 ед. Затраты по доставке единицы груза из каждого населенного пункта в соответствующие участки ликвидации чрезвычайной ситуации заданы матрицей тарифов (таблица 12.4). Необходимо разработать план доставки аварийно-спасательных средств с наименьшими затратами.

Таблица 12.4 – Матрица затрат

№ варианта		B_1	B_2	B_3
1.	A_1	4	3	6
	A_2	3	2	8
	A_3	5	4	7
2.	A_1	6	5	7
	A_2	8	9	11
	A_3	6	8	4
3.	A_1	4	6	8
	A_2	3	5	7
	A_3	2	5	9
4.	A_1	5	1	11
	A_2	7	3	12
	A_3	9	6	9
5.	A_1	8	8	5
	A_2	4	3	6
	A_3	3	9	3
6.	A_1	1	2	9
	A_2	4	6	7
	A_3	2	5	4
7.	A_1	8	4	2
	A_2	9	2	8
	A_3	11	1	5
8.	A_1	10	5	9
	A_2	5	6	4
	A_3	6	7	3
9.	A_1	2	8	8
	A_2	9	13	4
	A_3	6	9	4
10.	A_1	4	8	3
	A_2	11	7	9
	A_3	3	6	7

Список используемой литературы

1. Громыко Г. Л. Теория статистики. Практикум.— 3-е изд., доп. и перераб.— М.: Инфра-М, 2010.— 205 с.
2. Ефимова М. Р., Петрова Е. В., Румянцев В. Н. Общая теория статистики: Учебник.— 2-е изд., доп. и перераб.— М.: Инфра-М, 2010.— 416 с.
3. Килин П. М. Система измерения макроэкономического кругооборота регионального продукта.— Тюмень, ТюмГНГУ, 2009.—156 с.
4. Назаров М. Г. Статистика. Учебно-практическое пособие.— М.: КНОРУС, 2010.— 480 с.
5. Октябрьский П. Я. Статистика: учеб.— М: ТК Велби, Изд. Проспект, 2010.— 328 с.
6. Плошко Б. Г., Елисеева И. И. История статистики.— М.: Финансы и статистика, 1990
7. Статистика: Учебник для вузов (+ CD) / под ред. профессора И. И. Елисеевой — СПб.: Питер, 2012.— 368 с.
8. Статистика: учебник / И. И. Елисеева [и др.]; под ред. И. И. Елисеевой.— Москва: Проспект, 2011.— 448 с.
9. Статистика: учебн. / В. Г. Минашкин [и др.]; под ред. В.Г, Минашкина.— М.: ТК Вел би, Изд-во Проспект, 2006.— 272 с.
10. Статистика: учебно-практическое пособие. Под ред. М. Г. Назарова.— М.: КНОРУС, 2011.— 480 с.
11. Статистика. Практикум: учебное пособие / кол.авторов; под ред. В. Н. Салина, Е. П. Шпаковской.— М.: КНОРУС, 2009.— 496 с.
12. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с:
13. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. /Пер. И.И. Глушко; ред. В.И. Нейман. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
14. Миллер Б. М., Панков А. Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. -320 с.
15. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — 2-ое изд., стере. — М. : Высш. шк., 2000. — 481 с.
16. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика : — учебник. — 5-е изд., стер. — М.: Кнорус, 2010. — 576 с.
17. Герасимович, А. И. Математическая статистика. — Минск : Выш. шк., 1983. — 279 с.
18. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — М. : Высш. шк., 2003. — 479 с.
19. Жевняк, Р. М. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для студентов. инж.-экон. спец./ Р. М. Жевняк, А. А. Карпук, В. Т. Унукович. — Минск : Харвест, 2000. — 384 с.

20. Аксенчик, А. В. Методические указания и контрольные задания по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» для студентов всех специальностей БГУИР заочной формы обучения/ А. В. Аксенчик [и др.] – Минск : БГУИР, 2002. – 60 с.
21. Брушлинский, Н.Н. Основы теории организации, функционирования и управления экстренными и аварийно-спасательными службами: Монография / Н.Н. Брушлинский, С.В. Соколов – М.: Академия МЧС России, – 2018. 92 с.
22. Мулен, Э. Теория игр с примерами из математической экономики.— М.: Мир, 1985.
23. Нейман, Дж. фон К теории стратегических игр.— В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961.
24. Нейман, Дж. фон, Моргенштерн, О. Теория игр и экономическое поведение.— Наука, 1970.
25. Нэш Дж. Бескоалиционные игры.— В кн.: Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961.
26. Оуэн Г. Теория игр.— М.: Мир, 1971.
27. Экланд И. Элементы математической экономики.— Мир, 1983.
28. Cho I., Kreps D. Signaling Games and Stable Equilibria.— The Quarterly Journal of Economics, 1987, 102, №2, 179—221.
29. Balas E., Fischetti F., Pulleyblank W. R. The precedence-constrained asymmetric traveling salesman polytope // Math. Program. Ser. — 1995. — Vol. 68. - P. 241-265.
30. Bartholdi J. J., Platzman L. K. An $O(n \log n)$ planar travelling salesman heuristic based on spacefilling curves // Operations Research Letters.— 1982. — Vol. 1, no. 4. — P. 121-125.
31. B.Efron. Bootstrap methods: Another look at the jackknife // The Annals of Statistics. — 1979. - Vol. 7, no. 1. P. 1-26.
32. Behzad A., Modarres M. A new efficient transformation of the generalized traveling salesman problem into traveling salesman problem // Proc. of the 15th Intl. Conf. of Systems Engineering (ICSE). — Las Vegas, 2002.
33. Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem // J. Assoc. Comput. Mach.— 1962, — no. 9,- P. 61-63.
34. Berdyshev Y. I. A problem of the sequential approach to the group of moving points by third order non-linear control system // J. Appl. Math. Mechs. — 2002.— Vol. 66, no. 5. - P. 709-718.
35. Berg T., Hempel H. Reoptimization of traveling salesperson problems: Changing single edge-weights // In Proceedings of the 3rd International Conference on Language and Automata Theory and Applications. — 2009.— P. 141-151.
36. Bertsimas D., Grigni M. On the spacefilling curve heuristic for the euclidean traveling salesman problem // Operations Research Letters. — 1989. — Vol. 8, no. 5. — P. 241-244.

37. Волкович В.Л. Экспертные оценки в задачах принятия решения. – Киев: Наукова думка, 1971.
38. Голубков Е.П. Какое принять решение. – М.: Экономика, 2000.
39. Горелик В.Н., Горелов М.Н., Кононенко А.Ф. Анализ конкретных ситуациях в системах управления. – М.: Наука, 1991, 122 с.
40. Доусон Р. Уверенно принимать решение: Как научиться принимать решения в бизнесе и жизни. – М.: ЮНИТИ, 2000.
41. Евланов Л.Г. Теория и практика принятия решений. - М.: Экономика, 1984.
42. Екатеринославский Ю.Ю. Управленческие ситуации. Анализ и решения. – М.: Экономика, 1988.
43. Жерардэн Л. Исследование альтернативных картин будущего: метод составления сценариев: Руководство по научно-техническому прогнозированию. - М.: Прогресс, 1977.
44. Жуковин В.Е. Методы и процедуры принятия решения. – Тбилиси, 1981
45. Иванов А.И., Малявина А.В. Разработка управленческих решений. – М.: МАЭП, ИИК «Калита», 2000.
46. Карпов А.В. Психология принятия управленческих решений. – М.: Юрист, 1998.
47. Кини Р., Райфа Г. Принятие решения при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Сов. Радио, 1981, 555 с.
48. Китов А.И. Психологические особенности принятия управленческих решений. – М.: Знание, 1983.
49. Китов А.И. Психология принятия решения. – М.: Экономика, 1977.
50. Кокорева Т.А. Системный анализ процедур принятия решения. – М.: Лесная промышленность, 2001, 144 с.
51. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решения в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1991, 183 с.
52. Кравченко Т.К. Процесс принятия плановых решений. – М.: Патент, 2001.
53. Кхол Й. Эффективность управленческих решений. – М.: Прогресс, 1975.
54. Ланге Л. Оптимальные решения. – М.: Прогресс, 1967.
55. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. – М.: Патент, 1979.
56. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. – М.: Наука, 1987, 191 с.
57. Лебедев О.Т. Основы менеджмента. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000
58. Лебедев О.Т., Каньковская А.Р. Основы менеджмента. – СПб.: МиМ, 2000.
59. Левин А.М., Смолкин В.М. Основы системного анализа и теории принятия решения. – Рига: Зинатне, 1973, 245 с.

60. Лескин А.А., Мальцев В.Н. Системы поддержки управленческих и проектных решений. – Л.: Машиностроение, 1990.
61. Литвак Б.Г. Разработка управленческого решения. – М.: Дело, 2002.
62. Литвак Б.Г. Экспертные оценки и принятие решений. – М.: Патент, 2003.
63. Макаров И.М. Теория выбора и принятия решения. – М.: Наука, 1982.
64. Мартино Дж. Технологическое прогнозирование. – М.: Прогресс, 1977.
65. Мескон М.Х., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента. – М.: Дело, 1992.
66. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981.
67. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. – М.: Мир, 1990.
68. Оптнер С.Л. Системный анализ для решения деловых и промышленных проблем. – М.: Сов. радио, 1969.
- Планкетт Л., Хейл Г. Выработка и принятие управленческих решений. – М., 1984.
69. Пригожин А.И. Социологические проблемы управленческих решений. – М.: Знание, 2004.
70. Райфа Х. Анализ решений. – М.: Наука, 1977.
71. Рельян Я.Р. Аналитическая основа принятия управленческих решений. – М.: Финансы и статистика, 1989.
72. Саркисян С.А., Акопов П.Л., Мельникова Г.В. Научно-техническое прогнозирование и программно-целевое планирование в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1987.
73. Сидельников Ю.В. Теория и организация экспертного прогнозирования. – М.: ИМЭМО АН, 1990.
74. Статистические модели и многокритериальные задачи принятия решения. – М.: Наука, 1976, 272 с.
75. Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. – М.: Статистика, 1971.
76. Теория прогнозирования и принятия решения. – М.: Наука, 1977, 112 с.
77. Тихомиров Ю.А. Управленческое решение. – М.: Наука, 1972.
78. Трухаев Р.Н. Методы принятия решения в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1980 321 с.
79. Фатхутдинов Р.А. Разработка управленческого решения. – М.: ЗАО «Бизнес-школа «Интел-Синтез», 1998.
80. Фишберн П. Теория полезности для принятия решения. – М.: Наука, 1978, 352 с.
81. Цыгичко В.Н. Руководителю – о принятии решений. – М.: ИНФРА – М, 2006.

82. Эддоус М., Стэнсфилд Р. Методы принятия решений. – М.: Аудит, ЮНИТИ, 1997.
83. Янч Э. Прогнозирование научно-технического прогресса. – М.: Прогресс, 1974.
84. Буянов Б.Б., Лубков Н.В., Поляк Г.Л. Система поддержки принятия управленческих решений с применением имитационного моделирования // Проблемы управления. – №6. – (2006) – С. 43-49
85. Владимиров А.В. Параметрические паретовские процедуры выбора. - М. : ВНИИСИ, 1986, вып. 14.
86. Габусу П.А., Михеев О.В., Самохина А.С. Анализ схем обработки первичных данных в системе предотвращения биологической чрезвычайной ситуации // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций. 2006. № 4. С. 64-71.
87. Гафт М.Г. Принятие решений при многих критериях. - М. : Знание, 1979, 237 с.
88. Гладков П.С., Гладков С.В. Метод нечеткого многокритериального анализа в оценке мероприятий для снижения рисков возникновения чрезвычайных ситуаций // Современные наукоемкие технологии. 2008. № 4. С. 62-70.
89. Игнатьев И.В., Шакиров В.А., Беляев А.С. Многокритериальный анализ вариантов размещения генерирующих мощностей в энергодефицитных районах // Научно-технические ведомости СПбГТУ. Том 1. Естественные и технические науки. – 2006. – №5-1 (47). – С. 68-74.
90. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения замещения: пер. с англ. / Под ред. И.Ф. Шахнова - М.: Радио и связь, 1981. - 560 с.
91. Климовцов В.М. Особенности формирования экспертных оценок для системы поддержки принятия решений в ГПС // Материалы 12 международной конференции «Системы безопасности» СБ-2003. - М.: Академия ГПС МЧС России, 2003. - С.118-120.

Издание Академии гражданской защиты имени Малика Габдуллина
Министерства по чрезвычайным ситуациям Республики Казахстан

Арман Булатович Кусаинов

Практические аспекты принятия управленческих решений в гражданской
защите математическим методом

учебное пособие

Начальник НИЦ

Редактор

Компьютерная верстка

И. Захаров

С. Садвокасова

К. Шаймерденов

Научно-исследовательский центр Академии гражданской защиты им. Малика
Габдуллина МЧС Республики Казахстан г.Кокшетау, ул. Акана-серэ, 136

Подписано в печать 04.09.2025 г.

Тираж 50 экз. Формат 60х84 1/16.

Бумага «SvetoCopy».

Усл. п.л.7. Заказ №37